


**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA AGRÍCOLA**

**ESTUDO DO COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO**  
**DE FRUTOS ESFÉRICOS**

**POR**  
**ARIEL WERNER LINARES**

Parecer

Este exemplar corresponde a redação final da dissertação de Mestrado defendida por Ariel Werner Linares e aprovada pela Comissão Julgadora em 27 de agosto de 1996. Campinas, 01 de outubro de 1996.

  
Presidente da Banca  
Inácio M. Dal Fabbro  
DEPTO. DE MÁQUINAS AGRÍCOLAS  
FEAGRI - UNICAMP

**Campinas - S.P.**

**julho de 1996**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA AGRÍCOLA**

**ESTUDO DO COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO**  
**DE FRUTOS ESFÉRICOS**

**POR**  
**ARIEL WERNER LINARES**

**Orientador:**  
**Prof. Dr. INÁCIO M. DAL FABBRO**

**Dissertação apresentada em cumprimento parcial aos requisitos para do título de Mestre em**  
**Engenharia Agrícola: Área de concentração: Máquinas Agrícolas.**

**Campinas- S.P.**

**julho de 1996**

9620043



UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	UNICAMP
	L 632e
V.	Ex.
TOMBO BC	29149
PROC.	667/96
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	27/11/96
N.º CPD	

CM-00095420-7

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DA ÁREA DE ENGENHARIA - BAE - UNICAMP

L632e

Linares, Ariel Werner

Estudo do comportamento viscoelástico de frutos  
esféricos / Ariel Werner Linares.--Campinas, SP: [s.n.],  
1996.

Orientador: Inácio M. Dal Fabbro  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de  
Campinas, Faculdade de Engenharia Agrícola.

1. Viscoelasticidade. 2. Laranja. I. Dal Fabbro, Inácio  
M. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de  
Engenharia Agrícola. III. Título.

## **DEDICATÓRIA**

*Aos meus pais,  
irmãos e familiares.*

## **AGRADECIMENTOS**

- Ao Prof. Inácio M. Dal Fabbro, pela orientação e apoio durante todo o trabalho;
- Aos colegas da Pós-graduação, que colaboraram durante os ensaios;
- A Ana Paula Montagner e Marta Vechi pela amizade e suporte junto a Secretaria de Pós-Graduação;
- Aos membros do Cômite de Orientação, Prof. Antonio Carlos de O. Ferraz e Claudio Bianor Sverzut, pela colaboração durante este trabalho.
- Aos funcionários da Faculdade de Engenharia Agrícola e da Faculdade de Engenharia Mecânica, pela colaboração no desenvolvimento dos ensaios;
- Aos Departamentos de Engenharia Agrícola e Engenharia Mecânica, pela disponibilidade de suas instalações;
- A Universidade Estadual de Campinas e a CAPES, pelo suporte financeiro.

## SUMÁRIO

	Página
DEDICATÓRIA .....	ii
AGRADECIMENTOS.....	iii
LISTA DE SÍMBOLOS.....	vii
RESUMO .....	x
1. INTRODUÇÃO .....	1
2. REVISÃO DE LITERATURA.....	4
2.1 Introdução.....	4
2.2 Comportamento elástico .....	4
2.3 Comportamento viscoelástico .....	6
3. TEORIA BÁSICA .....	11
3.1 Introdução.....	11
3.2 Lei de Hooke generalizada .....	12
3.3 Teoria da elasticidade aplicada a corpos esféricos.....	14
3.4.1 Pressão de contato entre um elipsóide e uma superfície plana .....	23
3.4 Viscoelasticidade.....	26

3.4.1 Formulação analítica.....	26
3.4.2 Formulação analógica .....	27
3.4.3 Princípio da correspondência elástico-viscoelástico.....	30
3.4.4 Viscoelasticidade não linear.....	32
3.4.5 Compressão de uma esfera viscoelástica entre duas superfícies rígidas, planas e paralelas.....	32
4. MATERIAL E MÉTODOS.....	34
4.1 Materiais .....	34
4.2 Ensaio de compressão.....	34
4.2.1 Ensaio com deformação controlada .....	39
4.2.1 Ensaio carga controlada.....	40
4.3 Delimitação experimental .....	42
5. RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	43
5.1. Ensaio com Laranja.....	43
5.1.1. Força controlada - $F_{11}(t)$ .....	43
5.1.2. Deformação controlada - $U_{11}(t)$ .....	44
5.2 Ensaio com Borracha .....	45
5.2.1. Força controlada - $F_{11}(t)$ .....	45
5.2.2. Deformação controlada - $U_{11}(t)$ .....	47
6. CONCLUSÕES.....	51
7. SUGESTÕES PARA FUTUROS ESTUDOS .....	52
8. ANEXOS.....	53

<b>9. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>125</b>
<b>9.1. Citada.....</b>	<b>125</b>
<b>9.2. Consultada.....</b>	<b>128</b>
<b>10. ABSTRACT .....</b>	<b>130</b>
<b>11. APÊNDICE .....</b>	<b>131</b>



## LISTA DE SÍMBOLOS

$\delta_{ij}$ - delta de Kronecker	-
$\alpha$ - Deformação	mm
$\beta$ - Constante dependente dos Raios $R_1$ e $R_2$	-
$\varepsilon_{ij}$ - Tensor deformação Específica	mm/mm
$\Delta l$ - Variação de Comprimento	mm
$\Delta V$ - Variação de Volume	mm <sup>3</sup>
$\phi(t)$ - Função <b>relaxation</b>	Pa
$\gamma$ - Distorção Específica de Cisalhamento	mm/mm
$\theta$ - Ângulo de Cisalhamento	rad
$\sigma_{ij}$ - Tensor tensão	Pa
$\sigma_r$ - Tensão Radial	Pa
$\tau$ - Tensão de Cisalhamento	Pa

$\nu$ - Coeficiente de Poisson	-
$\nu(t)$ - Função Viscoelástica - Coeficiente de Poisson dependente do tempo	-
$\psi(t)$ - Função <b>creep</b>	Pa
A - Coeficiente de Redução de Rigidez	-
A(t) - Área de Contato em função do tempo	mm <sup>2</sup>
a - Raio da Superfície de Contato	mm
B - Constante dependente da Velocidade de Impacto e Massa do Fruto	N
$B_u$ - Componente de deslocamento	-
$B_\sigma$ - Componente de tensão	-
C - Coeficiente de Calibração	-
D - Deformação	mm
E - Módulo de Elasticidade Longitudinal	Pa
E(t) - Módulo de Elasticidade dependente do tempo	Pa
F - força de Impacto	N
F(t) - Força de Compressão dependente do tempo	N
G - Módulo de Elasticidade Transversal	Pa
$G_1(t)$ - Função <b>relaxation</b> Deviatórica	Pa
$G_2(t)$ - Função <b>relaxation</b> Volumétrica	Pa
I - Integral da Força de Impacto	N
K - Módulo Volumétrico (“ <b>Bulk Modulus</b> ”)	Pa
k - Rigidez do Fruto	Pa . mm

$k_0$ - Rigidez Inicial	Pa . mm
$K_1$ e $K_2$ - Constantes Elásticas das Esferas	1/Pa
$l$ - Comprimento	m
$P$ - Força	N
$q_0$ - Pressão	Pa
$R$ - Coeficiente de Amortecimento	-
$r$ - Distância ao Eixo $Z_1$ ou $Z_2$	mm
$R_1$ e $R_2$ - Raio da Superfície Esférica	mm
$S$ - Área	mm <sup>2</sup>
$s$ - Variável de Transformação de Laplace	-
$T$ - Duração do Impacto	s
$t$ - Tempo Decorrido do Início do Impacto	s
$U(t)$ - Deformação em função do tempo	mm
$u_i$ - Vetor deslocamento	-
$V$ - Volume	mm <sup>3</sup>
$x_n$ - Coordenadas espaciais cartesianas ( $n = 1, 2, 3$ )	-
$X_i$ - Coordenada material	-
$w$ - Deslocamento em relação a $Z$	mm
$Z$ - Eixo de simetria	-
$z$ - Distância do ponto $m$ ao plano tangente	mm

## RESUMO

No caso de projetos de máquinas, através das funções viscoelásticas, pode-se simular solicitações (compressão, corte, etc.) a qual está submetido o material durante os processos de seleção, processamento e transporte, podendo assim chegar a correta intensidade de forças e velocidades a qual será submetido este material, minimizando assim injúrias e quem sabe até custos.

Partindo de ensaios de compressão com diversas funções  $F_{11}(t)$  e  $U_{11}(t)$  (sinusoidais, quadradas e lineares) força e deformação respectivamente, e diferentes velocidades,  $\dot{F}_{11}(t)$  e  $\dot{U}_{11}(t)$ , com o objetivo de excitar o fenômeno viscoelástico, foram determinadas as funções  $\gamma(t)$ .

A característica comum das funções  $\gamma(t)$  se identifica na forma de hipérbola equilátera ou também denominada retangular. Notou-se que o ponto de singularidade da função hiperbólica em todos os casos variou com as razões  $\dot{F}_{11}(t)$  e  $\dot{U}_{11}(t)$ , o que evidencia um comportamento viscoelástico.

Não foi possível separar os efeitos de não linearidade geométrica e de não linearidade material, visto que os presentes casos envolveram carregamento de espécimens

esféricos, que pela sua definição se enquadram em não linearidade geométrica além de uma possível não linearidade material.

## **1. INTRODUÇÃO**

Na área agrícola a demanda por equipamentos mais eficientes nos processos de colheita, transporte e seleção tem crescido, visando a minimização das injúrias mecânicas que ocorrem nesses processos. Para o dimensionamento desses equipamentos é imprescindível a caracterização dos produtos agrícolas quanto as suas propriedades mecânicas.

Este estudo visa fornecer informações sobre o comportamento do material sob diferentes solicitações mecânicas, viabilizando o projeto de equipamentos destinados ao manuseio mecânico de órgãos vegetais, para que a qualidade do produto seja mantida nos processos de colheita ou processamento, transporte e seleção.

Um capítulo muito importante do estudo do comportamento mecânico do tecido vegetal, trata da geometria dos órgãos vegetais e de sua semelhança com formas geométricas definidas e simétricas apresentadas aos corpos de prova. Dentro disso, a forma geométrica esférica é bastante comum nos órgãos vegetais, notadamente para frutos e dentre esses a laranja. No estudo, os corpos de prova esféricos devem ser tratados com a

particularidade a estes peculiar, ou seja, tensões de contato. Nesse particular a Lei de Hooke e a Viscoelasticidade Linear deixam de ser importantes, por constituir, esse caso, um exemplo típico de não linearidade geométrica.

A importância de um estudo visando evitar perdas e/ou aumentar a eficiência de equipamentos, se faz evidente no caso do cultivo da laranja, pois o Brasil se destaca como sendo o maior exportador de suco de laranja concentrado congelado do mundo, correspondendo em mais de 80% do volume total mundial exportado. O retorno econômico provindo deste produto é de grande importância para o crescimento do setor agrícola do país. A partir da safra de 1979-1981, a citricultura brasileira vem ocupando o primeiro lugar em produção a nível de América do Sul (FAO, 1995). O estado de São Paulo é o maior produtor de laranja do Brasil com 76.750.000 toneladas anuais e com rendimento médio de 131.280 Kg/ha (Anuário Estatístico do Brasil, 1994).

Trabalhos anteriores enfatizaram as características elásticas da laranja, porém os próprios autores ressaltaram a necessidade de uma interpretação viscoelástica, pois sabe-se que os materiais biológicos, não são homogêneos e nem isotrópicos. Assim sendo podemos considerá-los como meios “multi-fase”, isto é, compostos de material sólido, líquido e gasoso.

O presente trabalho determinou as funções viscoelásticas, equações matemáticas que descrevem o comportamento do material em diversos tipos de solicitações mecânicas, através de ensaios de compressão, dando uma contribuição para pesquisas futuras e também no projeto de equipamentos de seleção, não só para a laranja mas também para frutos cuja forma seja aproximadamente esférica.

No caso de projetos de máquinas, através das funções viscoelásticas, pode-se simular solicitações (compressão, corte, etc.) a qual está submetido o material durante os processos de seleção, processamento e transporte, podendo assim chegar a correta intensidade de forças e velocidades a qual será submetido este material, minimizando assim injúrias e quem sabe até custos.



## 2. REVISÃO DE LITERATURA

### 2.1 Introdução

A investigação do comportamento mecânico dos materiais biológicos tem como um dos seus objetivos a elaboração de técnicas apropriadas para o manuseio de órgãos vegetais. Para tal é preciso a determinação das propriedades do material e análises de **Tensão-Deformação**. Modelos elásticos e viscoelásticos tem sido usados para representar a resposta mecânica do material sob diferentes condições de carregamento. MOHSENIN (1970), cita a importância das propriedades mecânicas dos produtos agrícolas e as necessidades de estudos e investigações dessa área.

### 2.2 Comportamento elástico

A determinação das constantes elásticas é assunto freqüente de pesquisas devido a necessidade de informações básicas sobre as propriedades do material. Módulo de elasticidade, **bulk modulus** e a constante de Poisson tem sido determinadas com espécimen inteiro ou cilíndrico de batata através de compressão uniaxial e hidrostática, de acordo com FINNEY (1963). O módulo de elasticidade também pode ser determinado por compressão

radial de espécimen cilíndrico (SHERIF et al, 1976; ROCHA, 1988; FERRAZ, 1987). A constante de Poisson e o módulo elástico uniaxial podem ser simultaneamente determinados a partir do **elastic bulk modulus** e da solução de Boussinesq para um êmbolo cilíndrico (MORROW, 1965). A constante de Poisson também pode ser determinada comparando a força axial de deformação em espécimen de maçã livre e cilíndrico restringido (HUGES e SEGERLIND, 1972). Os resultados de compressão radial de espécimens podem ser interpretados usando a teoria de contato de Hertz para obter valores do módulo de elasticidade (SNOBAR, 1973). O módulo volumétrico de espécimens inteiros de maçã pode ser determinado considerando o princípio de flutuação (CHEM, STUDER e LAM, 1975).

A distribuição de **Tensão e Deformação** em um corpo elástico é também de interesse prático para um estudo mais amplo na localização de danos. Testes de placa e êmbolo têm sido conduzidos em espécimens inteiros de pêssogo e pêra correlacionando deformação e distribuição de **stress** com estes sendo preditos por modelos elásticos (FRIDLEY et al, 1968).

Nos últimos anos uma aproximação mais complexa tem começado a substituir a teoria elástica na descrição de frutos e vegetais. O material biológico é agora considerado como um meio multi-fase, sendo constituído de gases, sólidos e componentes líquidos. Métodos de elementos finitos tem sido usados para obter a distribuição de **Deformação e Tensão** em corpos esféricos sobre condições assimétricas (GUSTAFSON, 1974).

### 2.3 Comportamento viscoelástico

Muitas investigações experimentais têm indicado a dependência do tempo no comportamento mecânico do tecido vegetal.

A taxa de **Deformação** afeta a resposta de um teste de impacto em material biológico (ZOERB, 1958). Os danos mecânicos na batata submetida a cargas de compressão é altamente afetada pela razão de **Deformação** (FINNEY, 1963). O comportamento viscoelástico não linear da maçã foi relatado por MORROW e MOHSENIN (1966), que o descreveram através de relações constitutivas lineares. A razão viscoelástica de Poisson pode ser determinada indiretamente a partir da constante elástica de Poisson pelo Princípio de Correspondência Elástico-Viscoelástico (DeBAERDEMAEKER, 1975). A dependência do tempo do modelo razão de Poisson foi diretamente notada pela quantificação do deslocamento lateral e axial de espécimens cilíndricos (CHAPPEL e HAMANN, 1968). Resultados similares foram relatados em testes realizados em batata doce (HAMMERLE e McCLURE, 1971).

As funções **relaxation** podem ser determinadas por carregamentos do tipo volumétrico e uniaxial (MORROW e MOHSENIN, 1966). De maneira similar as funções **creep** são determinadas aplicando cargas hidrostáticas a espécimens inteiros. As funções **Bulk** e **Shear relaxation** foram determinadas experimentalmente para o tecido de maçã e os resultados foram usados em uma esfera viscoelástica carregada por uma superfície plana (DeBAERDEMAEKER, 1975). Métodos dinâmicos tem sido usados também para determinar as propriedades viscoelásticas de materiais biológicos (MORROW e MOHSENIN, 1968).

Os parâmetros do modelo generalizado de Maxwell tem sido determinados experimentalmente para diferentes frutos e vegetais (MOHSENIN, 1970). Resultados de carregamentos do tipo volumétrico em maçãs foram comparadas com o modelo simples de Kelvin para obter uma expressão para a função **creep**. O relacionamento entre o **Complex moduli** e a **relaxation function** podem ser usados para calcular as funções **dynamic relaxation** e **shear relaxation** a partir de resultados experimentais (HAMANN, 1967).

O comportamento **creep** do mamão foi determinado sobre condições de **dead load** imposta por placas paralelas (WANG e CHANG, 1970). Um modelo simples de Maxwell pode ser usado para representar a resposta de duas esferas viscoelásticas uma caindo contra a outra (HAMANN, 1970). Uma esfera viscoelástica submetida a cargas de contato pode ser experimentalmente estudada e numericamente simulada (DeBAERDEMAEKER, 1975). DAL FABBRO (1979), apresentou estudos a respeito do comportamento viscoelástico linear e não linear para maçã.

Segundo ANAZODO (1982), materiais biológicos, incluindo plantas e produtos alimentícios são freqüentemente submetidos a forças mecânicas de diferentes tipos durante a produção, processamento e armazenamento. Em todos estes materiais, a *falha* é usualmente observada na forma de ruptura de sua estrutura celular interna e externa. Assim, as propriedades mecânicas de bio-materiais submetidos a condições de tensão, compressão e cisalhamento, devem ser conhecidas para facilitar a determinação da condição máxima permissível de tensão antes do ponto de ruptura. No estudo das propriedades mecânicas dos materiais biológicos, é assumido que as técnicas usadas para avaliação do comportamento de materiais de engenharia poderão ser aplicadas.

ASHFAQ HUSAIN (1971), estudando comportamento viscoelástico de arroz áspero com diferentes teores de umidade (13, 19 e 24,5%), concluiu que as sementes contendo umidades entre 13 e 24.5% comportam-se como material viscoelástico quando submetidas a deformações iniciais entre 0,22 e 0,42 mm e taxas de deformação entre 0,05 e 2,0 cm por minuto.

O comportamento de **stress relaxation** dos grãos de arroz submetidos a compressão pode ser descrito como um corpo generalizado de Maxwell, consistindo de três unidades em paralelo. A equação reológica é dada por :

$$F(t) = A_1 e^{-t/\tau_1} + A_2 e^{-t/\tau_2} + A_3 e^{-t/\tau_3} \quad (2.1)$$

O tempo de **relaxation** sempre decresce com taxas crescentes de deformação, deformações iniciais e teores de umidade.

A equação de **stress relaxation** para sementes de arroz, variedade Dular, com teor de umidade 19%, submetidas a um carregamento inicial de 6 Kgf a uma taxa de deformação de 0,5 mm por minuto pode ser representada por uma equação reológica do tipo :

$$F(t) = 4,5e^{-t/250,0} + 0,8e^{-t/4,1} + 0,7e^{-t/0,8} \quad (2.2)$$

ROSENFELD (1992), trabalhando com análise teórica baseada em simulação numérica de frutos elásticos e viscoelásticos submetidos a condições dinâmicas de contorno, descreve que o fruto pode ser representado como um meio contínuo tridimensional de forma

arbitrária satisfazendo a equação de onda elastodinâmica e condições de contorno. A resposta do fruto era obtida resolvendo as equações usando o Método de Elementos de Contorno (BEM). A simulação fornecia a solução para os campos de deslocamento e tração sobre a superfície do fruto em ambos os tempo ou domínios de frequência. O modelo viscoelástico análogo é estabelecido utilizando o princípio da correspondência. Os resultados obtidos para frequência concordam qualitativamente com resultados previamente publicados e corroboram com o fato de que é possível selecionar frutos por firmeza, de acordo com as suas frequências de ressonância.

YANG (1966), menciona que o problema de contato viscoelástico é estendido para abranger materiais lineares e superfícies quadradas arbitrárias dos corpos em contato. O uso das relações constitutivas de um operador integral, permite soluções por comparação com uma identidade integral conhecida na Teoria Potencial, como a usada por Hertz, na solução elástica original. YANG, fornece alguns exemplos para o caso de indentação de um *half-space* viscoelástico por um indentador esférico rígido e também o caso de contato entre duas esferas com diferentes propriedades materiais.

CHRISTENSEN (1968), estudando soluções para a viscoelasticidade não linear, revela que o desenvolvimento de várias teorias gerais para o comportamento mecânico de materiais com memória tem progredido para um ponto de considerável refinamento. Para a maior parte, estes desenvolvimentos tem seguido as linhas sugeridas pelas teorias da elasticidade não linear. Em termos mais simples, as relações constitutivas da elasticidade com taxas-independentes são substituídas por formas que relacionam variáveis de campo com funcionais que envolvem a história inteira de eventos. Existem, entretanto, muitas complicações causadas por esta memória de eventos passados em comparação com as

relações elásticas de taxa-independente, e não é totalmente inesperado que a aplicação destas teorias viscoelásticas não tem obtido o mesmo grau de desenvolvimento quando comparadas com aquelas na teoria da elasticidade não linear.

### 3. TEORIA BÁSICA

#### 3.1 Introdução

Segundo MOHSEIN (1970), muitos materiais biológicos, quando submetidos a uma carga, exibirão, além do comportamento tensão-deformação, uma característica viscosa ou de dependência do tempo de aplicação da carga.

Os materiais elásticos diferem dos viscoelásticos nas suas características de deformação MASE (1970). Os materiais elásticos apresentam deformação em função da carga aplicada, independentemente da taxa de aplicação da carga, isto é, da velocidade de aplicação dessa carga. Impõe-se uma carga e mede-se a deformação ou vice-versa. Tem-se portanto uma relação linear (TIMOSHENKO, 1970).

De acordo com MASE (1970), FLÜGGE (1975) e CHRISTENSEN (1982), os materiais viscoelásticos incluem o parâmetro tempo na relação tensão-deformação, dependendo da taxa de aplicação da carga e/ou da taxa de deformação.

Esses materiais, portanto, não apresentam constantes, mas sim, funções viscoelásticas que podem ou não ser lineares. As funções viscoelásticas são:  $E(t)$ ,  $v(t)$ ,  $K(t)$ ,  $G(t)$ , as quais podem ser combinadas, formando as funções  $\psi(t)$  e  $\phi(t)$ , conhecidas, respectivamente, por função **creep** e função de **relaxation** tratadas mais tarde.



Pelo princípio da correspondência elástico-viscoelástico, há formas análogas entre o domínio das equações elásticas e o domínio das equações viscoelásticas.

Há três maneiras de se descrever um relacionamento viscoelástico linear: Modelos analógicos (associação de molas e amortecedores), Princípio da Correspondência Elástico-Viscoelástico através da transformada de Laplace e métodos analíticos ou integrais hereditárias.

Neste trabalho usaremos métodos analíticos por razões que serão descritas no decorrer do trabalho.

### 3.2 Lei de Hooke generalizada

A elasticidade linear clássica assume que os deslocamentos e os gradientes de deslocamento são suficientemente pequenos de tal forma a não haver distinção entre a descrição de Lagrange e a de Euler. Portanto, em termos do vetor deslocamento  $u_i$ , o tensor linear de deformação pode ser dado pelas expressões equivalentes :

$$1_{ij} = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.1)$$

A equação constitutiva para um sólido elástico linear associando os tensores tensão e deformação é :

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.2)$$

conhecida como **lei de Hooke generalizada** (MASE, 1970).

Tomando duas constantes independentes, conhecidas como as constantes de Lamé,  $\lambda$  e  $\mu$ , a lei de Hooke para um corpo isotrópico pode ser escrita como :

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3.3)$$

e esta equação pode ser invertida para expressar **Deformação** em termos de **Tensão** como :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \delta_{ij} \sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} \quad (3.4)$$

Em termos das constantes elásticas a lei de Hooke para um corpo isotrópico toma a seguinte forma :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk} \right) \quad (3.5)$$

ou, quando invertida,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (3.6)$$

Partindo da consideração de um estado uniforme de pressão hidrostática de **Tensão**, é possível definir o **bulk modulus** como:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad \text{ou} \quad K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \quad (3.7)$$

Para um estado de puro cisalhamento, o **shear modulus**  $G$  descreve os componentes de cisalhamento de **Tensão e Deformação**.

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.8)$$

Podemos ainda expressar a lei de Hooke em termos de tensores :

- Deviatórico :  $S_{ij} = 2Ge_{ij}$  (3.9)

- Hidrostático :  $\sigma_{kk} = 3K\varepsilon_{kk}$  (3.10)

### 3.3 Teoria da elasticidade aplicada a corpos esféricos

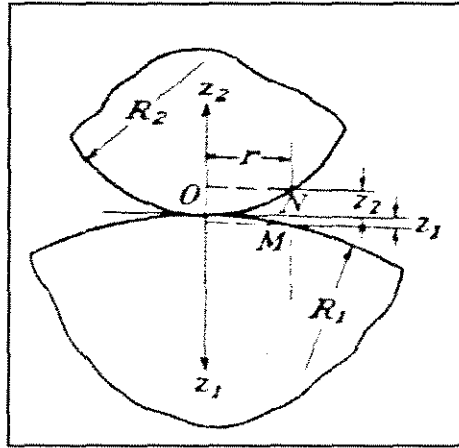
H. HERTZ (1881), propôs uma solução para este problema quando estudava a distribuição de pressões entre dois corpos em contato. Suponhamos que no ponto de contato estes sólidos tenham superfícies esféricas com raios  $R_1$  e  $R_2$  (Figura 3.1). Se não

existir pressão entre os corpos, o contato se reduzirá ao ponto **O**. As distâncias do plano tangente em **O**, a pontos tais com **M** e **N**, situados numa seção meridiana das esferas a uma distância muito pequena  $r$  dos eixos  $z_1$  e  $z_2$ , podem ser representadas com suficiente precisão pelas formulas

$$z_1 = \frac{r^2}{2R_1} \quad z_2 = \frac{r^2}{2R_2} \quad (3.11)$$

e a distância mútua entre estes pontos é

$$z_1 + z_2 = r^2 \left( \frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2} \right) = \frac{r^2(R_1 + R_2)}{2R_1R_2} \quad (3.12)$$



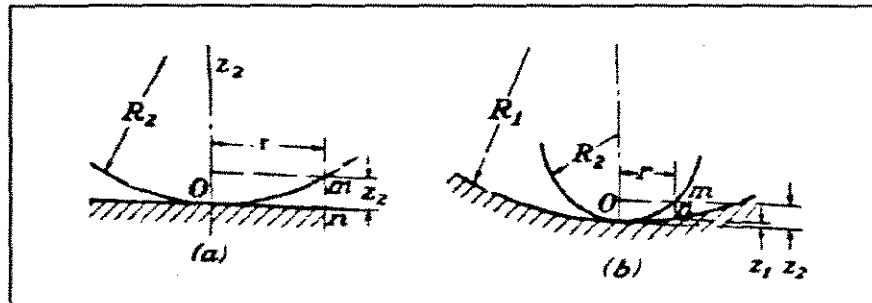
**Figura 3.1 : Contato entre Esferas.**

No caso particular do contato de uma esfera e um plano (Figura 3.4a),  $1/R_1$  é zero e de (3.12) para a distância **MN** resulta

$$z = \frac{r^2}{2R_2} \quad (3.13)$$

No caso do contato entre uma esfera e uma superfície esférica (Figura 3.4b),  $R_1$  é negativo em (3.12), logo

$$z_1 - z_2 = \frac{r^2(R_1 - R_2)}{2R_1R_2} \quad (3.14)$$



**Figura 3.2 :** Contato de uma Esfera com Superfície Plana e Esférica.

Se os sólidos forem comprimidos um de encontro ao outro, ao longo da normal em  $O$ , pela força  $P$ , existirá uma deformação local na vizinhança do ponto de contato que estenderá este contato sobre uma pequena superfície de contorno circular, chamada de superfície de contato. Admitindo-se que os raios de curvatura  $R_1$  e  $R_2$ , sejam muito grandes em comparação ao raio do contorno da superfície de contato, podemos aplicar, ao estudarmos a deformação local, os resultados obtidos quando se estuda sólidos semi-infinitos. Seja  $w_1$  o deslocamento, proveniente da deformação local na direção  $z_1$ , de um ponto tal como  $M$  pertencente à superfície da esfera inferior (Figura 3.1), e  $w_2$  o mesmo deslocamento na direção de  $z_2$ , de um ponto tal como  $N$  da esfera superior. Mantendo o plano tangente de  $O$  imóvel durante a compressão local, quaisquer dois pontos dos sólidos sobre os eixos  $z_1$  e  $z_2$ , situados a grandes distâncias de  $O$ , aproximar-se-ão entre si de uma quantidade  $\alpha - (w_1 + w_2)$ . Se finalmente, por efeito da compressão local, os pontos  $M$  e  $N$

forem abrangidos pela superfície de contato, teremos

$$\alpha - (w_1 + w_2) = z_1 + z_2 = \beta r^2 \quad (3.15)$$

onde  $\beta$  é uma constante que depende dos raios  $R_1$  e  $R_2$  e vem definida pelas Eqs.(3.12), (3.13) e (3.14). Então através de considerações geométricas, encontramos para um ponto qualquer da superfície de contato,

$$w_1 + w_2 = \alpha - \beta r^2 \quad (3.16)$$

Consideremos agora deformações locais. Segundo a condição de simetria , a intensidade  $q$  da pressão entre os corpos em contato e a deformação correspondente serão simétricas em relação ao ponto  $O$  da superfície de contato. Supondo que a Figura 3.5 represente a superfície de contato e que  $M$  seja um ponto da mesma pertencente à esfera inferior, o deslocamento  $w_1$  deste ponto, será

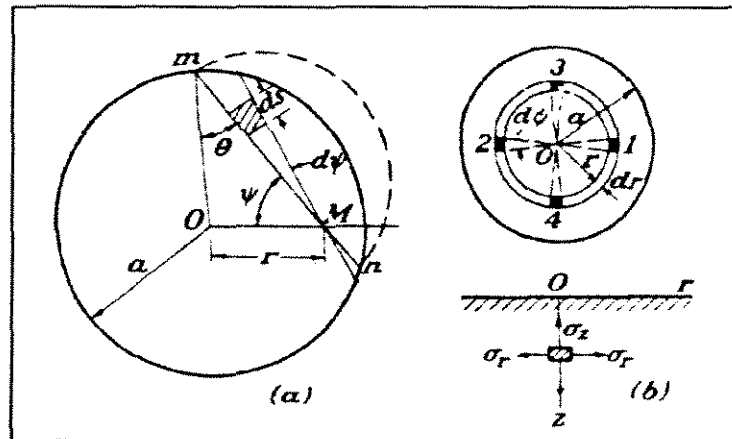


Figura 3.3 : Detalhes de Carregamento de uma Esfera.

$$w_1 = \frac{(1 - \nu_1^2)}{\pi E_1} \iint q \, ds \, d\psi \quad (3.17)$$

em que  $\nu_1$  e  $E_1$  são as constantes elásticas da esfera inferior, sendo a integração estendida a toda a área de contato. Uma fórmula análoga é obtida também para a esfera superior. Então

$$w_1 + w_2 = (k_1 + k_2) \iint q \, ds \, d\psi \quad (3.18)$$

na qual

$$k_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} \quad k_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \quad (3.19)$$

De (3.16) e (3.17)

$$(k_1 + k_2) \iint q \, ds \, d\psi = \alpha - \beta x^2 \quad (3.20)$$

Devemos, portanto, encontrar uma expressão para  $q$  que satisfaça (3.20). Demonstrando-se que esta exigência é satisfeita admitindo-se que a distribuição de pressões  $q$ , sobre a superfície de contato, é representada pelas ordenadas de um hemisfério de raio  $a$ , construído sobre a superfície de contato. Se  $q_0$  for a pressão no centro de  $O$  desta superfície, então

$$q_0 = ka \quad (3.21)$$

onde  $k = q_0/a$  é um fator constante que indica a escala com que representamos a distribuição de pressões. Ao longo da corda  $mn$ , a pressão  $q$  varia, como se indica na Figura 3.3 pela semicircunferência pontilhada. Efetuando a integração ao longo desta corda, obtemos

$$\int q \, ds = \frac{q_0}{a} A \quad (3.22)$$

onde  $A$  é a área do semicírculo indicado pela linha pontilhada, igual a  $\frac{1}{2}\pi(a^2 - r^2 \sin^2 \psi)$ .

Substituindo em (3.20), chegamos a

$$\frac{\pi(k_1 + k_2)q_0}{a} \int_0^{\pi/2} (a^2 - r^2 \sin^2 \psi) d\psi = \alpha - \beta r^2 \quad (3.23)$$

Esta equação deverá ser atendida para qualquer valor de  $r$ , portanto, a distribuição de pressões admitida será a correta se as seguintes relações para o deslocamento de  $\alpha$  e o raio  $a$  da superfície de contato:

$$\alpha = (k_1 + k_2)q_0 \frac{\pi^2 a}{2} \quad (3.24)$$

$$a = (k_1 + k_2) \frac{\pi^2 q_0}{4\beta} \quad (3.25)$$



O valor da pressão máxima  $q_0$  é obtido igualando-se a soma das pressões que atuam sobre a área de contato com a força compressiva  $P$ . Considerando uma distribuição hemisférica de pressões, resulta

$$q_0 = \frac{3P}{2\pi a^2} \quad (3.26)$$

isto é, a pressão máxima é  $1\frac{1}{2}$  vezes a pressão média sobre a superfície de contato.

Substituindo-se em (3.24) e tomando, de (3.12)

$$\beta = \frac{R_1 + R_2}{2R_1R_2} \quad (3.27)$$

encontramos, para duas esferas em contato (Figura 3.3),

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \frac{P(k_1 + k_2)R_1R_2}{R_1 + R_2}} \quad (3.28)$$

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{9\pi^2}{16} \frac{P^2(k_1 + k_2)^2(R_1 + R_2)}{R_1R_2}} \quad (3.29)$$

Supondo que ambas as esferas possuam as mesmas propriedades elásticas e fazendo com que  $\nu = 0,3$ , temos

$$a = 1,109 \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}} \quad (3.30)$$

$$\alpha = 1,23 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \quad (3.31)$$

A pressão máxima correspondente é

$$q_0 = \frac{3}{2} \frac{P}{\pi \alpha^2} = 0,388 \sqrt[3]{PE^2 \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1^2 R_2^2}} \quad (3.32)$$

No caso de uma esfera comprimida contra uma superfície plana, admitindo as mesmas propriedades elásticas para ambos os corpos, obtemos, substituindo-se  $1/R_1=0$  em (3.31) e (3.32),

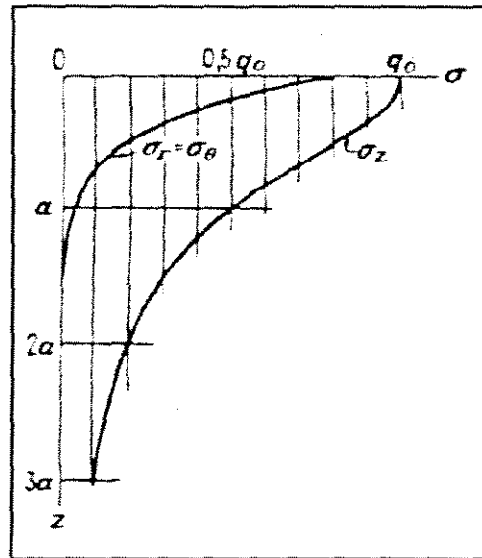
$$\alpha = 1,109 \sqrt[3]{\frac{PR_2}{E}} \quad (3.33)$$

$$\alpha = 1,23 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2 R_2}} \quad (3.34)$$

$$q_0 = 0,388 \sqrt[3]{\frac{PE^2}{R_2^2}} \quad (3.35)$$

Conhecidas a grandeza da superfície de contato e as pressões que nela atuam. Os resultados destes cálculos para pontos dos eixos  $Oz_1$  e  $Oz_2$  são mostrados na Figura 3.4. A pressão máxima  $q_0$ , no centro da superfície de contato, é tomada como unidade de tensão. Na medição das distâncias ao longo do eixo  $z$ , o raio  $\alpha$  da superfície de contato é

considerado como unitário. A máxima tensão é a compressão  $\sigma_z$  que atua no centro da superfície de contato, mas as outras duas tensões principais  $\sigma_r$  e  $\sigma_\theta$ , neste mesmo ponto, são iguais a  $\frac{1}{2}(1+2\nu)\sigma_z$ .



**Figura 3.4 :** Pressão  $q_0$  na superfície de contato x Raio da sup. de contato.

A tensão máxima de cisalhamento, aí (para  $\nu = 0,3$ ), é por volta de  $0,31q_0$ . No caso de materiais frágeis, a ruptura é produzida pela tensão máxima de tração. Esta tensão ocorre no contorno circular da superfície de contato, atua segundo a direção radial e possui o valor

$$\sigma_r = \frac{(1-2\nu)}{3} q_0 \quad (3.36)$$

A outra tensão principal, atuando na direção circunferencial, é numericamente igual à

tensão radial citada, porem de sinal oposto. Sendo assim, ao longo da periferia da superficie de contato, onde as pressões normais sobre a mesma se anulam, temos cisalhamento puro de intensidade  $q_0 \frac{(1-2\nu)}{3}$ . Tomando  $\nu = 0,3$ , este valor fica igual a  $0,133q_0$ . É uma tensão muito menor que a tensão máxima de cisalhamento calculada acima, mas maior que as tensões de cisalhamento no centro da superficie de contato, onde a tensão normal é máxima (TIMOSHENKO, 1971).

### 3.4.1 Pressão de contato entre um elipsóide e uma superficie plana

O caso mais geral de dois corpos elásticos em contato, pode ser estudado de maneira que o anterior. Admitindo-se que a superficie adjacente ao ponto de contato é arredondada e pode ser considerada como superficie de grau 2, tem-se caso o corpo seja comprimido contra um placa plana, segundo a direção normal ao plano tangente, uma superficie de contato com contorno elíptico.

Considera-se agora o caso de uma elipsóide com excentricidade próxima a unidade (que possui seus raios principais de curvatura,  $R'_2$  e  $R''_2$ , aproximadamente iguais), sendo comprimida sobre uma superficie plana. Se  $b$  e  $c$  forem os semi-eixos de contorno elíptico da superficie de contato, e sabendo-se que  $b$  e  $c$  são muito menores que  $R'_2$  e  $R''_2$ , pode-se considerar  $b$  igual a  $c$ , isto é, pode-se aproximar a superficie de contato por uma superficie circular. Calcula-se o raio da superficie de contato pela equação abaixo:

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R'_2} + \frac{1}{R''_2} \right) \quad (3.37)$$

e se chega à equação (3.38):

$$a = \left( \frac{3}{2} P \frac{(1 - \nu_2^2)}{E_2} \left( \frac{R_2' R_2''}{R_2' + R_2''} \right) \right)^{1/3} \quad (3.38)$$

temos ainda, segundo TIMOSHENKO e GOODIER (1980), que para o caso de materiais biológicos sendo comprimidos contra uma placa plana lisa de aço:

$$E_2 = 0.75P(1 - \nu_2^2) \frac{1}{a^{3/2}} \frac{1}{R_2^{1/2}} \quad (3.39)$$

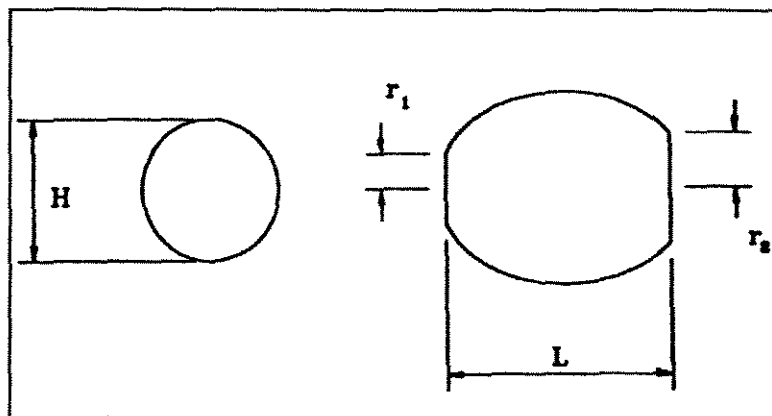
e substituindo-se (3.37) em (3.39), temos:

$$E_2 = \frac{0.530P(1 - \nu_2^2)}{D^{3/2}} \left( \frac{1}{R_2'} + \frac{1}{R_2''} \right)^{1/2} \quad (3.40)$$

Para o caso de uma laranja, seus raios principais de curvatura podem ser calculados, de acordo com a Figura 3.5, por:

$$R_2' = \frac{H}{2} \quad (3.41)$$

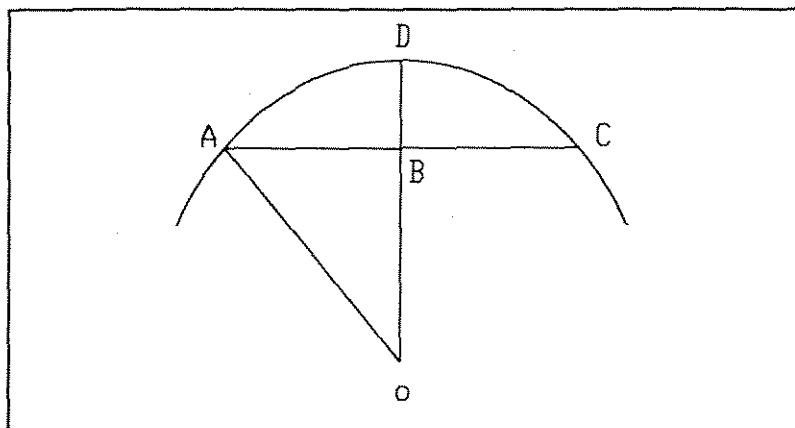
$$R_2 = \frac{L^2 + (H + r_1 - r_2)}{4(H - r_1 - r_2)} \quad (3.42)$$



**Figura 3.5 :** Cálculo do Raio de Curvatura de uma Laranja.

O cálculo de  $R_2$  baseia-se no raio de uma esfera, calculado pela equação abaixo e pela Figura 3.6, dados a seguir:

$$\text{raio da esfera} = \frac{(AC)^2}{8BD} + \frac{BD}{2} \quad (3.43)$$



**Figura 3.6:** Cálculo do Raio de uma Esfera.

### 3.4 Viscoelasticidade

#### 3.4.1 Formulação analítica

Para descrever o comportamento viscoelástico linear de materiais biológicos, são utilizados frequentemente, modelos viscoelásticos compostos por molas e amortecedores. MASE (1970), descreve que as tensões geradas na mola e no amortecedor podem ser calculadas por:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.44)$$

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon} \quad (3.45)$$

Existem modelos analógicos que descrevem comportamentos viscoelásticos, dentre estes o de Maxwell e Kelvin.

O modelo de Maxwell é composto por um elemento elástico em série com o elemento viscoso, resultando em uma equação constitutiva dada por :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\eta} \quad (3.46)$$

O modelo de Kelvin é composto por um elemento elástico em paralelo com o elemento viscoso, resultando em uma equação constitutiva dada por :

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta \dot{\varepsilon}(t) \quad (3.47)$$

Êsses modelos assim definidos podem formar um grande número de modelos combinando unidades Kelvin e Maxwell em série e em paralelo. Uma das limitações dos modelos analógicos reside no fato de se necessitar avaliar um grande número de modelos para comparar com os resultados experimentais obtidos, sendo portanto aconselhável a utilização de modelos analíticos, descritos no decorrer deste trabalho.

### 3.4.2 Formulação analógica

Segundo MASE (1970) e CHRISTENSEN (1982), no desenvolvimento da teoria tridimensional da viscoelasticidade linear, normalmente se considera separadamente o comportamento viscoelástico sobre condições de cisalhamento puro e dilatação pura. Estes feitos **distorcionais** e **volumétricos** são prescritos independentemente, e subseqüentemente combinados para prover a teoria geral. Matematicamente, isto pode ser resolvido tomando os tensores **Tensão** e **Deformação Específica** decompostos em suas componentes deviatóricas e esféricas, cujas relações constitutivas são escritas da seguinte maneira.

A decomposição do tensor **Tensão** dado por :

$$\sigma_{ij}(t) = S_{ij}(t) + \frac{\delta_{ij} \sigma_{kk}(t)}{3} \quad (3.48)$$

e o tensor **Deformação específica** :



$$\varepsilon_{ij}(t) = e_{ij}(t) + \frac{\delta_{ij}\varepsilon_{kk}(t)}{3} \quad (3.49)$$

Escrevendo as equações de cisalhamento e dilatação separadamente, em função das funções  $K(t)$  e  $G(t)$ , temos :

$$S_{ij}(t) = 2G(t)e_{ij}(t) \quad (3.50)$$

$$\sigma_{kk}(t) = 3K(t)\varepsilon_{kk}(t) \quad (3.51)$$

Seguindo a mesma regra geral de separação para o comportamento distorcional e hidrostático, as relações constitutivas para a viscoelasticidade tridimensional em forma de integral **creep** são dadas por:

- Tensor **Deformação** deviatórico -

$$e_{ij}(t) = \int_0^t \psi_s(t-t') \frac{\mathcal{A}_{ij}}{\mathcal{A}'} dt' \quad (3.52)$$

- Tensor **Deformação** hidrostático -

$$\varepsilon_{ii}(t) = \int_0^t \psi_v(t-t') \frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial t'} dt' \quad (3.53)$$

e na forma de integral **relaxation**, por:

- Tensor **Tensão** deviatórico -

$$S_{ij}(t) = \int_0^t \phi_s(t-t') \frac{\partial e_{ij}}{\partial t'} dt' \quad (3.54)$$

- Tensor **Tensão** hidrostático -

$$\sigma_{ii}(t) = \int_0^t \phi_v(t-t') \frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial t'} dt' \quad (3.55)$$

Para a determinação das funções **Uniaxial Relaxation**  $E(t)$  e **Constrained Relaxation**  $X(t)$ , utiliza-se as funções  $G_1(t)$  e  $G_2(t)$  mais as transformadas de Laplace, que serão descritas no item seguinte.

### 3.4.3 Princípio da correspondência elástico-viscoelástico

Segundo MASE (1970) e CHRISTENSEN (1982), este princípio surge de forma análoga entre as equações que governam o campo elástico e as transformadas de Laplace considerando o tempo das equações básicas da viscoelasticidade de acordo com a definição :

$$\bar{f}(x_k, s) = \int_0^{\infty} f(x_k, t) e^{-st} dt \quad (3.56)$$

Tanto a integral **creep** (3.52) ou a integral **relaxation** (3.54) podem ser usadas para especificar as características de um dado material, isto nós alerta ao fato que deve existir algum relacionamento entre a função **creep**  $\psi(t)$  e a função **relaxation**  $\phi(t)$ . Tal relacionamento não é facilmente determinado em geral, mas usando a definição acima (3.56) é possível mostrar que as transformadas de  $\psi(t)$  e  $\phi(t)$  são relacionadas pela equação

$$\bar{\psi}(s)\bar{\phi}(s) = 1/s^2 \quad (3.57)$$

onde  $s$  é o parâmetro de transformação (MASE, 1970).

É possível definir as funções **relaxation** de forma apropriada a outros estados de **Tensão** uniforme em termos de  $G_1(t)$  e  $G_2(t)$ . A analogia entre as transformadas de Laplace para as relações viscoelásticas isotrópicas de **Deformação específica-Tensão** e as relações comparáveis elásticas isotrópicas de **Tensão-Deformação específica**, mostra que as funções **relaxation** para outros estados de **Tensão** são definidas simplesmente através das

relações elásticas, pela substituição do módulo elástico pelo multiplicador de transformação  $s$  das funções viscoelásticas de **relaxation**.

Por exemplo, a função uniaxial de **relaxation** é definida pela transformada,

$$\bar{E}(s) = \frac{3\bar{G}_1(s)\bar{G}_2(s)}{\bar{G}_1(s) + 2\bar{G}_2(s)} \quad (3.58)$$

e a função constrained **relaxation**,

$$\bar{X}(s) = \frac{2\bar{G}_1(s) + \bar{G}_2(s)}{3} \quad (3.59)$$

Segundo CHRISTENSEN (1982), o princípio da correspondência apresenta algumas limitações, pois as equações básicas que governam os problemas viscoelásticos de contorno, estão sujeitos a condição que  $B_u$  e  $B_\sigma$  são independentes do tempo, onde estas são partes do contorno sobre a qual componentes de deslocamento e componentes do vetor tensão respectivamente são prescritos. Caso isto não seja verdadeiro, em alguns pontos do contorno deverão ser prescritos deslocamentos para alguns valores de tempo e prescritas componentes do vetor tensão para outros valores de tempo. Nestes casos, o uso de transformação por métodos de integração falha porque seu uso requer que o tipo de condições de contorno (componentes de deslocamento ou vetor tensão) sejam invariáveis com o tempo.

GRAHAM, citado por CHRISTENSEN (1982), apresenta também uma extensão do princípio da correspondência elástico-viscoelástico aplicável a vários casos de indentações onde as variações de  $B_u$  e  $B_\sigma$  podem ser minimizadas e portanto pouco

aplicável ao presente caso.

#### 3.4.4 Viscoelasticidade não linear

Segundo MASE (1970), a viscoelasticidade não linear tem muitos aspectos em comum com a teoria linear e o aspecto mais fundamental entre ambas é a “**hipótese da memória**”. Em termos de relacionamento entre **Tensão** e **Deformação**, isto significa que o valor de **Tensão** não é determinado apenas pelo valor corrente de **Deformação**, mas também pelo completo histórico passado de **Deformação**. Esta Hipótese, de que o material tem na memória registrado eventos passados nos quais ocorreram deformações, é o ponto de partida no desenvolvimento da teoria linear, mas sendo também para a teoria não linear.

Outro aspecto importante é a não linearidade geométrica, característico quando a deformação do material não possui uma relação linear com o aumento da área de contato durante um ensaio de compressão. Nesse último caso se inclui todos os casos de deformação-tensão em corpos esféricos e cilíndricos, comprimidos diametralmente.

#### 3.4.5 Compressão de uma esfera viscoelástica entre duas superfícies rígidas, planas e paralelas

De acordo com o que foi apresentado em 3.3 podemos definir uma função viscoelástica, característica material como sendo  $\gamma(t)$ , também definida na lista de símbolos.

Da equação (3.54) o termo material pode ser então expresso como :

$X_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) - coordenadas espaciais cartesianas.

$$U_{11}(t) = \frac{3}{4} F_{11}(t) \left( \frac{1 - \nu(t)^2}{E(t)} \right) \frac{1}{a} \quad (3.60)$$

onde :

$$\gamma(t) = \frac{1 - \nu^2(t)}{E(t)} \quad (3.61)$$

$$a = \left( \frac{A(t)}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.62)$$

obtendo-se :

$$\gamma(t) = 0.7523 U_{11}(t) A(t)^{\frac{1}{2}} F_{11}(t)^{-1} \quad (3.63)$$

A equação acima mencionada (3.63) será utilizada neste trabalho, de acordo com procedimentos posteriormente descritos com a finalidade de estudar tensões de contato em frutos esféricos que geram relações não lineares com a geometria do corpo.

Este estudo poderá viabilizar a caracterização de materiais viscoelásticos cuja forma seja esférica ou aproximadamente esférica. Será possível aprimorar também os métodos de seleção, pois tendo-se um maior conhecimento das características viscoelásticas o processo de seleção torna-se mais eficiente.

## **4. MATERIAL E MÉTODOS**

Foram realizados ensaios de compressão, executados no Laboratório de Propriedades Mecânicas de Materiais Biológicos do Departamento de Máquinas Agrícolas da Faculdade de Engenharia Agrícola e no Laboratório de Ensaios Mecânicos da Faculdade de Engenharia Mecânica.

### **4.1 Materiais**

- Máquina de testes : Ottawa Texture Measuring System;
- Máquina Universal de Ensaio MTS;
- Corpos de Prova de Borracha;
- Frutos esféricos : Laranja pêra (*Citrus Sinensis* Osbeck);
- Câmera e Videocassete VHS;
- Monitor de Video.

### **4.2 Ensaio de compressão**

Foram realizados os seguintes ensaios :

- Frutos inteiros com casca e sem casca;
- Esferas de borracha;

Os ensaios com fruto inteiro foram realizados sem alcançar o ponto de ruptura, dessa forma teve-se a superfície curva do espécimen de borracha e/ou do fruto sendo comprimida por uma superfície plana. Isto gerou um estado triaxial de tensões, pois o ponto de contato entre as duas superfícies passará a ser uma superfície de contato e, portanto, as tensões desenvolvidas serão tridimensionais.

Para a compressão das laranjas foram utilizadas duas placas planas, lisas e polidas, com velocidades variadas, com a finalidade de se impor diferentes **Taxas de Deformação**. Foram impostas diversas funções  $F_{11}(t)$  e  $U_{11}(t)$ , sinusoidais (Figura 4.5), quadradas (Figura 4.6) e lineares (Figura 4.7), com o objetivo de excitar o fenômeno viscoelástico. Isso implicou também em variar  $\dot{F}_{11}(t)$  e  $\dot{U}_{11}(t)$ .

Para vários níveis de força aplicada, nos ensaios foi determinada a área de contato. Isto foi realizado utilizando um dispositivo (Figura 4.1) pelo qual se podia ver a área de contato do fruto ou esfera de borracha através de uma placa de acrílico e com auxílio de um espelho e uma câmera VHS pode-se filmar a variação da área de contato no decorrer do ensaio.

O corpo de prova era colocado sobre a placa de acrílico juntamente com líquido de contraste (óleo de corte + água, leite), estando a placa de acrílico acoplada a um suporte de aço inoxidável (Figura 4.2). Para obter a visão da parte inferior da placa, foi utilizado um espelho e frente a este uma filmadora VHS, que registrava todo o ensaio. Na determinação do raio da área de contato, foi utilizada uma transparência milimetrada que estava aderida na



parte inferior da placa de acrílico (Figura 4.3 e 4.4), assim pode-se registrar no decorrer dos ensaios a variação da área de contato.

Para análise dos dados foi utilizado um videocassete VHS e um monitor de vídeo (TV) onde eram reproduzidas as imagens coletadas durante os ensaios. Durante esta análise era necessária a determinação dos pontos inicial e final de cada ensaio, para isto foi utilizado o áudio das gravações onde foram inseridas as marcas correspondentes. Estando os pontos inicial e final determinados, podia-se determinar o número de leituras intermediárias a serem realizadas entre o ponto inicial e final do ensaio como pode ser observado nas tabelas do Anexo A.

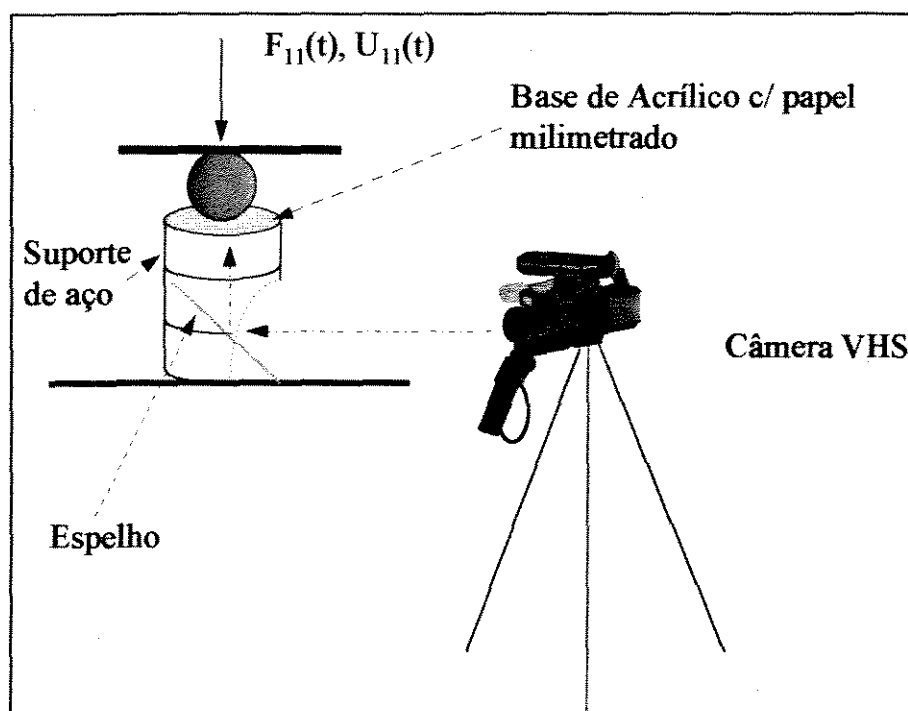


Figura 4.1 : Dispositivo para determinação da área de contato.

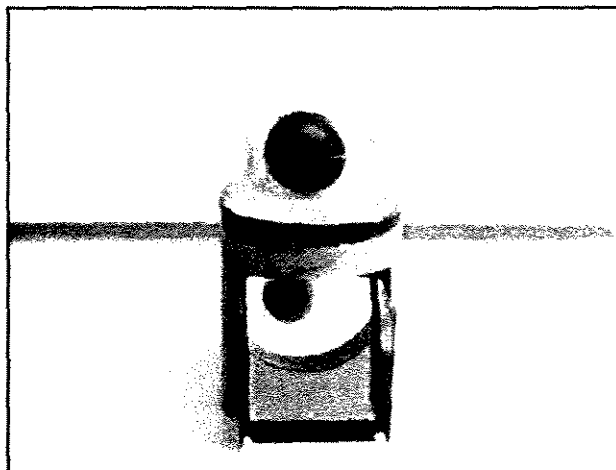


Figura 4.2 : Suporte de aço.

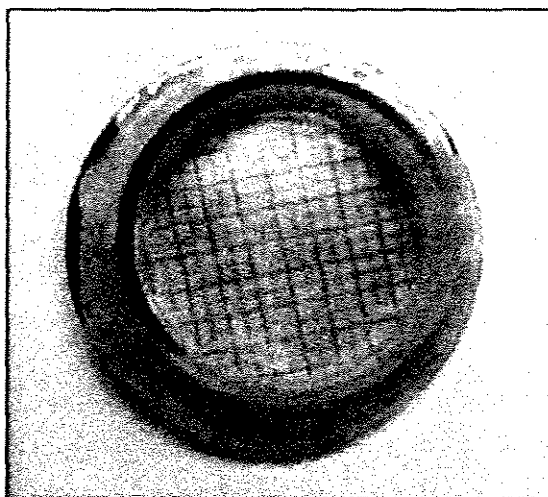


Figura 4.3 : Placa de acrílico com  
transparência milimetrada.

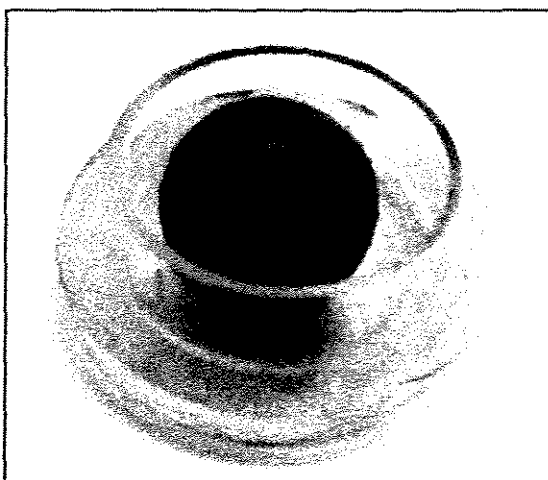


Figura 4.4 : Disposição do corpo de prova  
sobre a placa de acrílico.

Os ensaios do fruto sem casca foram descartados pois a retirada da casca descaracterizou totalmente o comportamento do material, já que a mesma é a responsável pela resistência à deformação do material.

Para se determinar erro de falta de esfericidade da laranja, foram usados corpos de borracha esféricos, com características conhecidas ( $E$ ,  $\nu$ ), submetendo-os também a ensaios de compressão.

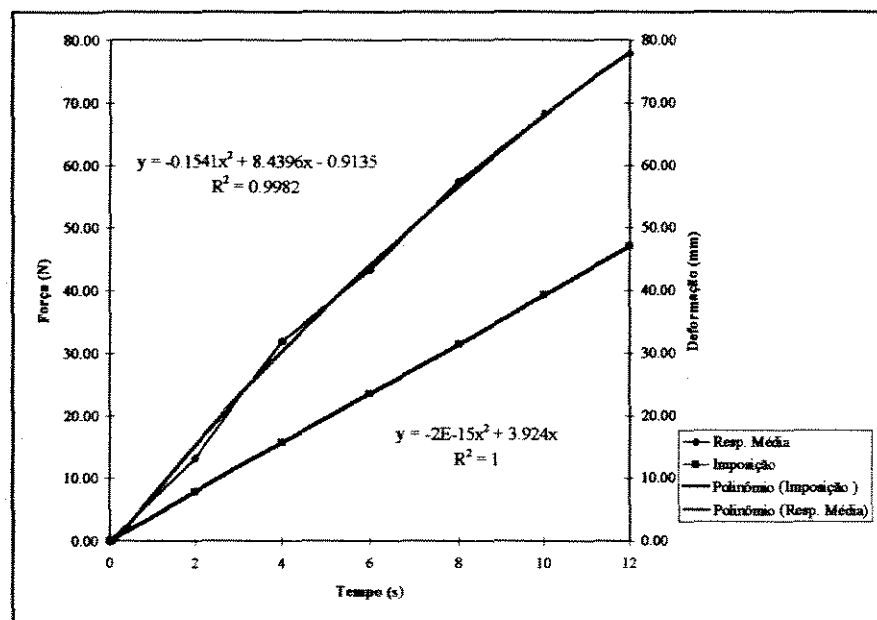


Figura 4.5 : Função linear de Força para Laranja.

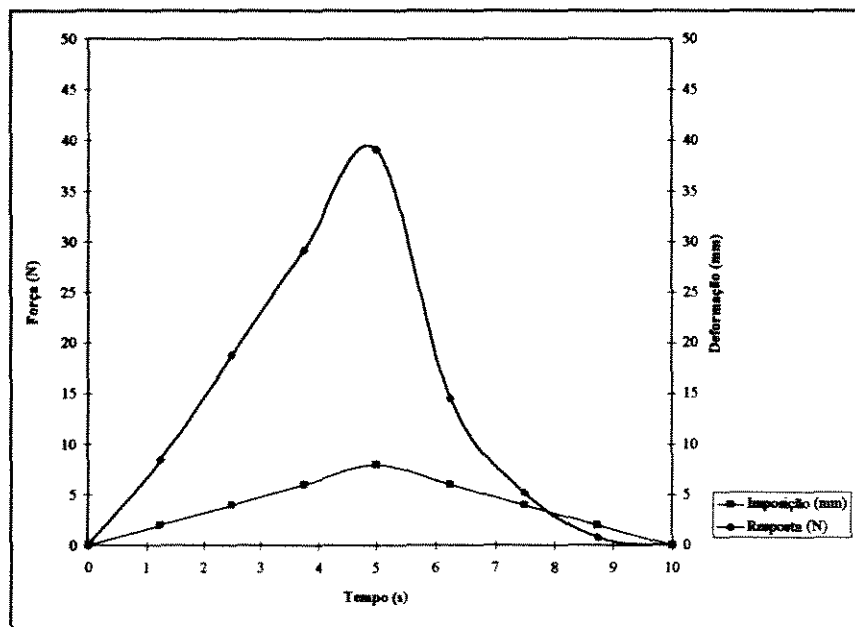


Figura 4.6 : Função senoide de Deformação para Laranja.

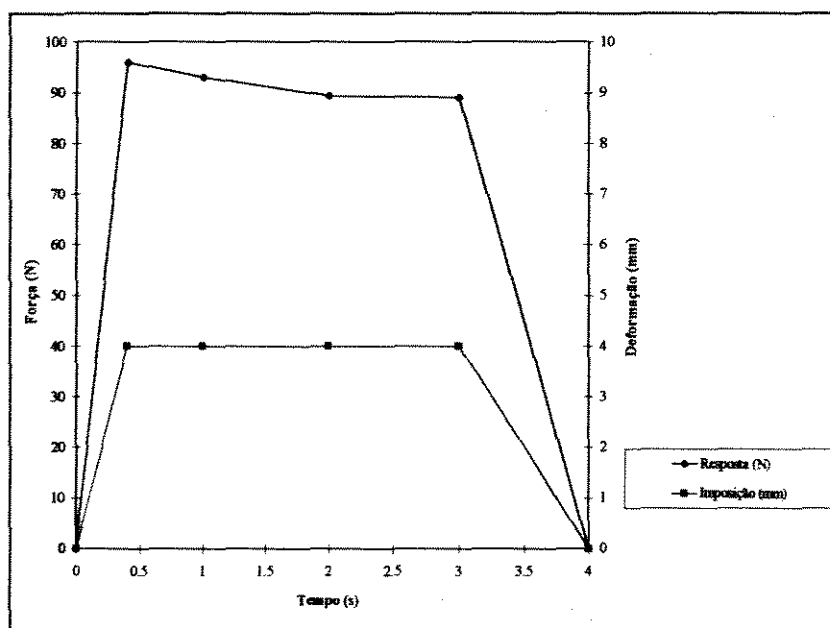


Figura 4.7 : Função quadrada de Deformação para Laranja.

#### 4.2.1 Ensaios com deformação controlada

Devido as limitações do aparelho (Figura 4.8) foram realizados apenas ensaios de deformação, com função linear, em laranja e esfera de borracha. Foram realizados ensaios

nas velocidades de 0.28, 0.33, 0.84, 1.23, 1.59 mm/s. Para coleta dos dados foi utilizado o sistema de aquisição de dados acoplado a um micro computador. Foram realizadas 10 repetições para cada velocidade. Foram coletados valores de força, deformação e área de contato que variam com o tempo, calculando-se posteriormente média, desvio padrão e coeficiente de variação. Com os dados coletados montaram-se as funções  $F_{11}(t)$ ,  $U_{11}(t)$  e  $A(t)$ .



Figura 4.8 : Máquina Ottawa com sistema de aquisição de dados.

#### 4.2.1 Ensaios carga controlada

Neste equipamento (Figura 4.9) foram realizados ensaios de força e deformação com funções lineares, sinusoidais e quadradas, para laranja e borracha :

- Laranja - força controlada :
  - Linear - 4,91; 3,92 e 2,94 N/s;
  - Senoidal - 9,81 N/s;
  - Quadrada - não realizado;
- Laranja - deformação controlada :
  - Quadrada - 5 mm/s (velocidade na rampa);

- Senoidal - 1.6 mm/s;
- Borracha - força controlada :
  - Senoidal - 19,62; 24,53; 32,67; 49,05 e 98,10 N/s;
  - Linear - 19,62; 15,70; 11,77; 7,85 e 3,92 N/s;
  - Quadrada - 159,96 N/s (velocidade na rampa);
- Borracha - deformação controlada :
  - Linear - 0.28, 0.33, 0.84, 1.23 e 1.59 mm/s;
  - Senoidal - 0.8, 0.67, 0.57, 0.50 e 0.44 mm/s;
  - Quadrada - 10 mm/s (velocidade na rampa).

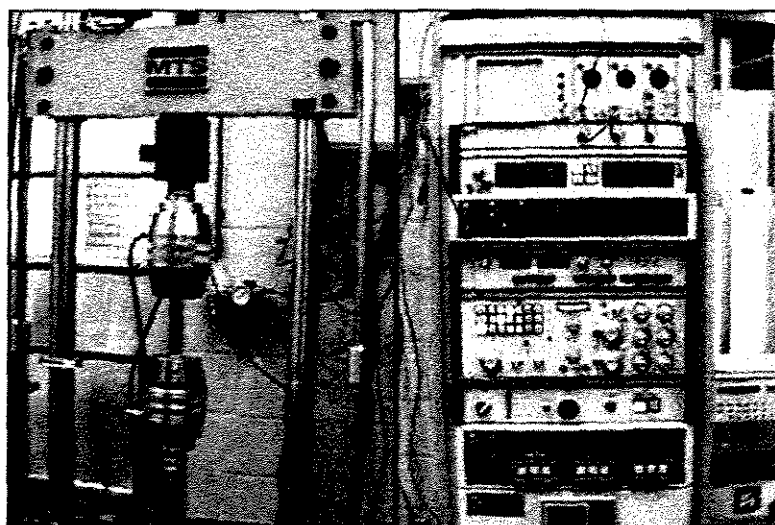


Figura 4.9 : Sistema MTS com aquisição de dados.

Os dados, força e deformação, neste equipamento foram registrados através de um *plotter x,y* (Figura 4.10), que fornecia gráficos de Força x Tempo e Deformação x Tempo. Tendo os dados de força, deformação e raio da área de contato, foram montadas as respectivas planilhas e gráficos no software Excel (ver Anexos A e B). Ainda dentro deste programa foram feitos ajustes de curvas, sendo eles nas curvas de imposição, resposta e área. Em alguns casos o software Excel não foi capaz de fazer um ajuste adequado, sendo necessário então recorrer ao software Mathematica, usando rotinas que estão exemplificadas

no apêndice (Apêndice A). Desta maneira poderam ser montadas as funções  $F(t)$ ,  $U(t)$  e  $A(t)$ . Para a obtenção da função  $\gamma(t)$  (Anexo C) o software Mathematica também foi utilizado, onde a rotina está exemplificada no Apêndice B.

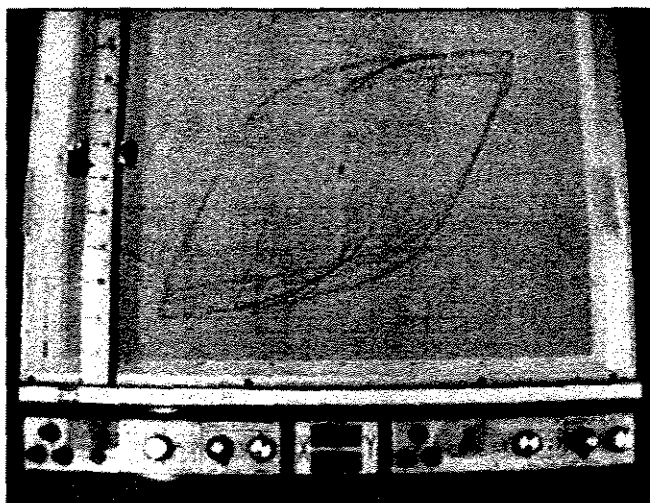


Figura 4.10 : Plotter x,y - MTS.

### 4.3 Delineamento experimental

Como não serão envolvidas variáveis como variedade, época de colheita ou qualquer outra, foi usado como delineamento estatístico, cálculo de média, desvio padrão e coeficiente de variação para os dados coletados.

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Substituindo as funções  $F_{11}(t)$ ,  $U_{11}(t)$  e  $A(t)$  encontradas (apêndice), na equação (3.63) chega-se as funções viscoelásticas  $\gamma(t)$  para cada velocidade de imposição, seja ela, força ou deformação, tanto para laranja quanto borracha, como segue.

### 5.1. Ensaios com Laranja

#### 5.1.1. Força controlada - $F_{11}(t)$

- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 4,91 \text{ N/s}$

$$\gamma(t) = 15046 \left( -0.0351 + 1156t - 0.0279t^2 \right) \left( 19635 + 205.81t - 31438t^2 + 2.0848t^3 \right)^{0.5} t^{-1} \quad (5.1)$$

- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 3,92 \text{ N/s}$

$$\gamma(t) = 188075 \left( -0.0931 + 0.8603t - 0.157t^2 \right) \left( 14.883 + 167.98t - 17.429t^2 + 0.7393t^3 \right)^{0.5} t^{-1} \quad (5.2)$$

- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 2,94 \text{ N/s}$

$$\gamma(t) = 22797 \left( -0.0017 + 0.4724t - 0.0667t^2 - 0.0044t^3 \right) \left( 1591 + 155.38t - 17992t^2 + 0.8469t^3 \right)^{0.5} t^{-1} \quad (5.3)$$



- Senoide -  $\dot{F}_{11}(t) = 9,81 \text{ N/s}$

$$\gamma(t) = \left( \frac{0.7523(-0.02503 + 2.55t - 0.019t^2 - 0.020t^3)(5130 + 33832t - 3510t^2 - 39.01\cos[t])^{0.5}}{(-0.35 + 1.75t - 0.17t^2 - 8.50 \cdot 10^{-19}t^3)} \right) \quad (5.4)$$

### 5.1.2. Deformação controlada - $U_{11}(t)$

- Quadrada -  $\dot{U}_{11}(t) = 5 \text{ mm/s}$

$$\gamma(t) = \left( \frac{0.7523(91263t - 3129t^2 + 26.07t^3)^{0.5}(0.39 + 24.21t - 22.77t^2 + 8.25t^3 - 102t^4)}{0.342 + 14.36t + 14.28t^2 + 5.24t^3 - 0.63t^4} \right) \quad (5.5)$$

- Senoide -  $\dot{U}_{11}(t) = 1.6 \text{ mm/s}$

$$\gamma(t) = \left( \frac{0.75(91.43 + 235.89t - 3112t^2 - 91.07\cos(t))^{0.5}(0.05 + 1.56t - 0.26t^2 + 0.01t^3 - 0.89\sin(t))}{0.10 + 2.29t - 0.17t^2 - 0.006t^3 - 102\sin(t)} \right) \quad (5.6)$$

- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 0.28 \text{ mm/s}$

$$\gamma(t) = \frac{0.21t(7.91 + 35.03t - 3.21t^2 + 0.16t^3)^{0.5}}{-0.07 + 0.13t + 0.0011t^2} \quad (5.7)$$

- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 0.33 \text{ mm/s}$

$$\gamma(t) = \frac{0.49t(43.51 + 18.01t + 0.30t^3)^{0.5}}{-0.16 + 0.18t + 0.0041t^2} \quad (5.8)$$

- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 0.84 \text{ mm/s}$

$$\gamma(t) = \frac{0.63t(44.06 + 47.06t + 0.79t^3)^{0.5}}{-0.014 + 0.28t + 0.035t^2} \quad (5.9)$$

- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 1.23 \text{ mm/s}$

$$\gamma(t) = \frac{0.92t(33.20 + 91.97t + 0.007t^2)^{0.5}}{-0.67 + 0.65t + 0.066t^2} \quad (5.10)$$

- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 1.59 \text{ mm/s}$

$$\gamma(t) = \frac{119t(14.32 + 124.95t - 119t^2)^{0.5}}{3.50 - 2.52t + 0.86t^2 - 0.047t^3} \quad (5.11)$$

## 5.2 Ensaaios com Borracha

### 5.2.1. Força controlada - $F_{11}(t)$

- Senoide -  $\dot{F}_{11}(t) = 19,62 \text{ N/s}$

$$\gamma(t) = \frac{0.7523(91.48 + 235.89t - 311.2t^2 - 91.07\cos(t))^{0.5}(0.050 + 1.56t - 0.26t^2 + 0.0102t^3 + 0.89\sin(t))^{0.5}}{0.105 + 2.29t - 0.17t^2 - 0.0064t^3 - 1.022\sin(t)} \quad (5.12)$$

- Senoide -  $\dot{F}_{11}(t) = 24,53 \text{ N/s}$

$$\gamma(t) = \frac{0.7523(2.15 \cdot 10^{-14} + 139.54t + 1.49t^2 - 9.21t^3 + 0.87t^4)^{0.5} (0.051 + 1.96t - 0.23t^2 - 0.026t^3 + 0.074\sin(t))}{-0.14 + 5.72t - 1.23t^2 + 0.068t^3 - 2.0\sin(t)} \quad (5.13)$$

- Senoide -  $\dot{F}_{11}(t) = 32,67 \text{ N/s}$

$$\gamma(t) = \frac{0.7523(0.025 + 2.71t - 0.45t^2 - 150 \cdot 10^{-6}t^3)(1.64 \cdot 10^{-13} + 125.31t + 22.49t^2 - 16.66t^3 + 1.56t^4)^{0.5}}{0.043 + 0.61t + 3.53t^2 - 1.21t^3 + 0.10t^4} \quad (5.14)$$

- Senoide -  $\dot{F}_{11}(t) = 49,05 \text{ N/s}$

$$\gamma(t) = \frac{0.7523(-0.21 + 4.14t - 1.03t^2 + 6.42 \cdot 10^{-17}t^3)(-1.13 \cdot 10^{-13} + 392.92t - 187.75t^2 + 21.83t^3)^{0.5}}{5.19 \cdot 10^{-14} - 3.33t + 14.67t^2 - 6.67t^3 + 0.83t^4} \quad (5.15)$$

- Senoide -  $\dot{F}_{11}(t) = 98,10 \text{ N/s}$

$$\gamma(t) = 0.32(-1.04 \cdot 10^{-13} + 454t - 227t^2)^{0.5} \quad (5.16)$$

- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 19,62 \text{ N/s}$

$$\gamma(t) = 1.07(t(27.18 - 9.32t + t^2))^{0.5} (0.018 + 2.29t - 0.55t^2 + 0.052t^3)t^{-1} \quad (5.17)$$

- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 15,70 \text{ N/s}$

$$\gamma(t) = 1.17(0.079 + 1.14t - 0.094t^2)(t(29.72 - 9.30t + t^2))^{0.5} t^{-1} \quad (5.18)$$

- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 11,77 \text{ N/s}$

$$\gamma(t) = 166 \left( t(23.62 - 8.42t + t^2) \right)^{0.5} (0.012 + 131t - 0.26t^2 + 0.023t^3) t^{-1} \quad (5.19)$$

- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 7,85 \text{ N/s}$

$$\gamma(t) = 0.94 (0.0033 + 0.6878t - 0.072t^2 + 0.004t^3) (147.36 - 63.54t^2 + 1196t^3 - 0.75t^4)^{0.5} t^{-1} \quad (5.20)$$

- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 3,92 \text{ N/s}$

$$\gamma(t) = 188 (-0.012 + 0.4948t - 0.074t^2 + 0.006t^3) (151 + 8128t - 2693t^2 + 4.26t^3 - 0.216t^4)^{0.5} t^{-1} \quad (5.21)$$

- Quadrada -  $\dot{F}_{11}(t) = 159,86 \text{ N/s}$

$$\gamma(t) = \frac{0.7523 (-0.084 + 303.55t - 209.12t^2 + 59.79t^3 - 6.02t^4)^{0.5} (-0.0016 + 5.91t - 4.07t^2 + 11.65t^3 - 0.11t^4)}{-0.0055 + 19.79t - 13.58t^2 + 3.88t^3 - 0.39t^4} \quad (5.22)$$

### 5.2.2. Deformação controlada - $U_{11}(t)$

- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 0.28 \text{ mm/s}$

$$\gamma(t) = \frac{0.21t(6.004 + 12.86t + 0.017t^2)^{0.5}}{-0.77 + 0.34t + 0.0126t^2} \quad (5.23)$$

- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 0.33 \text{ mm/s}$

$$\gamma(t) = \frac{0.25t(-26.31 + 45.77t - 3.54t^2 + 0.14t^3)^{0.5}}{0.22 - 0.28t + 0.10t^2 - 0.0017t^3} \quad (5.24)$$

- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 0.84 \text{ mm/s}$

$$\gamma(t) = \frac{0.63t(34.36 + 38.78t + 0.54t^2)^{0.5}}{-0.58 - 0.04t + 0.35t^2 - 0.0095t^3} \quad (5.25)$$

- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 1.23 \text{ mm/s}$

$$\gamma(t) = \frac{0.93t(14.22 + 83.13t - 3.59t^2)^{0.5}}{1.79 - 2.73t + 1.058t^2 - 0.043t^3} \quad (5.26)$$

- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 1.59 \text{ mm/s}$

$$\gamma(t) = \frac{1.19t(201.06 - 167.29t + 114.28t^2 - 15.31t^3)^{0.5}}{0.83 - 0.79t - 0.05t^2 + 0.13t^3} \quad (5.27)$$

- Senoide -  $\dot{U}_{11}(t) = 0.8 \text{ mm/s}$

$$\gamma(t) = \frac{0.75(4.42 + 97.82t - 1136t^2 + 0.18t^3 - 47.05\sin(t))^{0.5}(0.052 + 1.14t - 0.085t^2 - 0.003t^3 - 0.51\sin(t))}{0.11 + 3.92t - 0.27t^2 - 0.014t^3 - 3.98\sin(t)} \quad (5.28)$$

- Senoide -  $\dot{U}_{11}(t) = 0.67 \text{ mm/s}$

$$\gamma(t) = \frac{0.75(0.054 + 0.16t + 0.32t^2 - 0.057t^3 + 0.0023t^4)(1.63 + 8.98t + 23.94t^2 - 411t^3 + 0.17t^4)^{0.5}}{-0.086 - 1.61t + 2.34t^2 - 0.37t^3 + 0.015t^4} \quad (5.29)$$

- Senoide -  $\dot{U}_{11}(t) = 0.57 \text{ mm/s}$

$$\gamma(t) = \frac{0.75(0.076 + 0.11t + 0.24t^2 - 0.036t^3 + 0.0012t^4)(13.41 + 30.48t + 9.06t^2 - 1.66t^3 + 0.061t^4)^{0.5}}{0.26 - 2.56t + 2.12t^2 - 0.28t^3 + 0.010t^4} \quad (5.30)$$

- Senoide -  $\dot{U}_{11}(t) = 0.50 \text{ mm/s}$

$$\gamma(t) = \frac{0.75(0.087 + 0.105t + 0.18t^2 - 0.024t^3 + 0.00075t^4)(-1.024 - 5.59t + 17.11t^2 - 2.06t^4 + 16.05\text{Sin}(t))^{0.5}}{0.31 - 2.17t + 1.56t^2 - 0.18t^3 + 0.0057t^4} \quad (5.31)$$

- Senoide -  $\dot{U}_{11}(t) = 0.44 \text{ mm/s}$

$$\gamma(t) = \frac{0.75(0.105 + 0.070t + 0.15t^2 - 0.017t^3 + 0.00047t^4)(6.42 + 12.36t + 9.20t^2 - 1.11t^3 + 0.031t^4 - 0.35\text{Sin}(t))^{0.5}}{0.44 - 2.53t + 1.41t^2 - 0.144t^3 + 0.00041t^4} \quad (5.32)$$

- Quadrada -  $\dot{U}_{11}(t) = 10 \text{ mm/s}$

$$\gamma(t) = \frac{0.75(12.64 + 769.95t - 724.34t^2 + 262.33t^3 - 32.39t^4)^{0.5}(0.19 + 12.10t - 1.138t^2 + 4.12t^3 - 0.51t^4)}{0.49 + 29.63t - 28.92t^2 + 10.23t^3 - 1.25t^4} \quad (5.33)$$

As funções  $A(t)$ ,  $F_{11}(t)$  e  $U_{11}(t)$ , para os vários casos de carga e deformação controlada, também variando razão de força e deformação, apresentaram uma correlação acima de 0.90 para um polinômio de quarto grau.

A utilização de taxas de carga acima de 98,10 N/s (10 kgf/s) são desaconselháveis, pois estamos trabalhando com materiais biológicos cuja resistência a compressão é reduzida, fato este que foi verificado durante os ensaios de força controlada com Laranja durante ensaios com função Quadrada.

As funções  $\gamma(t)$ , para cada caso, foram estudadas além do tempo de ensaio, na tentativa de se estabelecer seu comportamento genérico.

A característica comum das funções  $\gamma(t)$  se identifica na forma de hipérbola eqüilateral ou também denominada retangular. De acordo com SELBY (1974), há casos de  $xy = k$ ,  $k > 0$  e  $xy = k$ ,  $k < 0$ , ambos os casos detectados neste trabalho. Nota-se que o ponto de singularidade da função hiperbólica em todos os casos variou com as razões  $\dot{F}_{11}(t)$  e  $\dot{U}_{11}(t)$ , o que evidencia um comportamento viscoelástico.

Não é possível separar os efeitos de não linearidade geométrica e de não linearidade material, visto que os presentes casos envolvem carregamento de especímenes esféricos, que pela sua definição se enquadram em não linearidade geométrica além de uma possível não linearidade material. Também como foi visto a princípio, pode-se obter especímenes com outras formas geométricas e ensaiadas sem forças de contato (HERTZ), mas não para a laranja.

O alto desvio padrão dos dados obtidos para a laranja se deve a fatores não controlados, como tamanho, firmeza e maturidade.

## 6. CONCLUSÕES

Em função dos resultados obtidos e das considerações feitas, pode-se concluir que :

6.1) Os valores altos de Desvio Padrão e Coeficiente de Variação (apêndice) encontrados, devem-se a característica biológica do material, isto é, não homogeneidade. além de outros fatores como : tamanho e maturidade.

6.2) As funções viscoelásticas encontradas ( $\gamma(t)$ ) apresentam dependência das razões  $\dot{F}_{11}(t)$  e  $\dot{U}_{11}(t)$ , caracterizando-se como função viscoelástica associada a esfera sob cargas de contato.

6.3) A metodologia empregada para a determinação da área de contato mostrou-se eficaz.

6.4) O emprego de espécimens de borracha cuja homogeneidade material supera a da laranja, mostrou-se eficaz como parâmetro de comparação para a laranja.

6.5) Não puderam ser segregados os efeitos da não linearidade geométrica e não linearidade material.



## **7. SUGESTÕES PARA FUTUROS ESTUDOS**

7.1) Seria interessante o desenvolvimento de uma metodologia ou maneira mais eficiente de determinação da área de contato, pois apesar de inovadora, a utilização da filmadora VHS na determinação, é um pouco limitada, no que se refere à qualidade das imagens, tempo requerido para posterior manuseio dos dados e confiabilidade.

7.2) Num trabalho futuro poder-se-ia considerar um material conhecidamente viscoelástico e de características conhecidas e submeter-se a isso o fenômeno de carga de contato.

## **8. ANEXOS**

## A) Tabelas de $F_{11}(t)$ , $U_{11}(t)$ e $A(t)$

### A.1) Ensaios com Laranja

#### A.1.1) Força controlada - $F_{11}(t)$

- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 4,91 \text{ N/s}$

Imposição	0.00	9.81	19.62	29.43	39.24	49.05
-----------	------	------	-------	-------	-------	-------

Rep.	Deformação					
	Tempo (s)					
	0	2	4	6	8	10
1	0.00	24.53	35.61	50.33	61.31	68.67
2	0.00	24.53	49.05	67.49	80.93	94.47
3	0.00	22.07	42.97	58.86	73.58	85.84
4	0.00	20.90	40.52	56.41	68.67	83.39
5	0.00	17.17	38.06	53.96	67.49	78.48
6	0.00	19.62	42.97	63.77	78.48	93.20
7	0.00	17.17	39.24	56.41	73.58	88.29
8	0.00	15.99	35.61	53.96	69.95	85.84
9	0.00	22.07	44.15	63.77	78.48	93.20
Resp. Média	0.00	20.45	40.91	58.33	72.50	85.71
D.P.	0.00	3.18	4.36	5.62	6.29	8.24
C.V.	0.00	15.54	10.67	9.64	8.67	9.62

Rep.	Área (mm <sup>2</sup> )				
	Tempo (s)				
	0	2	4	6	8
1	0.00	283.53	380.13	490.88	615.75
2	0.00	314.16	452.39	615.75	754.77
3	0.00	452.39	530.93	615.75	804.25
4	0.00	415.48	490.88	615.75	754.77
5	0.00	346.36	452.39	530.93	706.86
6	0.00	314.16	490.88	615.75	706.86
7	0.00	226.98	380.13	490.88	572.56
8	0.00	254.47	415.48	530.93	615.75
9	0.00	201.06	380.13	490.88	615.75
Média	0.00	312.07	441.48	555.28	683.04
D.P.	0.00	83.11	56.00	59.43	80.55
C.V.	0.00	26.63	12.68	10.70	11.79

- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 3,92 \text{ N/s}$

Imposição	0.00	7.85	15.70	23.54	31.39	39.24	47.09
-----------	------	------	-------	-------	-------	-------	-------

Deformação (mm)							
Rep.	Tempo (s)						
	0	2	4	6	8	10	12
1	0.00	7.36	20.90	30.71	42.97	52.78	61.31
2	0.00	22.07	41.69	53.96	68.67	78.48	90.74
3	0.00	12.26	35.61	46.60	62.59	73.58	83.39
4	0.00	9.81	23.35	31.88	45.42	56.41	63.77
5	0.00	17.17	31.88	44.15	60.14	69.95	80.93
6	0.00	11.09	39.24	49.05	62.59	72.40	82.21
7	0.00	12.26	25.80	33.16	44.15	52.78	61.31
8	0.00	9.81	24.53	34.34	47.87	58.86	68.67
9	0.00	14.72	40.52	60.14	73.58	85.84	96.92
10	0.00	15.99	35.61	49.05	66.22	80.93	89.57
Resp. Média	0.00	13.25	31.91	43.30	57.42	68.20	77.88
D.P.	0.00	13.84	33.01	44.56	58.86	69.74	79.54
C.V.	0.00	104.45	103.45	102.91	102.52	102.26	102.13

Área (mm <sup>2</sup> )							
Rep.	Tempo (s)						
	0	2	4	6	8	10	12
1	0.00	314.16	452.39	572.56	615.75	754.77	855.30
2	0.00	380.13	490.88	572.56	660.52	754.77	804.25
3	0.00	254.47	314.16	346.36	415.48	490.88	615.75
4	0.00	380.13	490.88	572.56	660.52	706.86	754.77
5	0.00	572.56	706.86	855.30	962.12	1017.88	1075.21
6	0.00	254.47	380.13	452.39	530.93	615.75	660.52
7	0.00	201.06	254.47	314.16	380.13	452.39	490.88
8	0.00	314.16	490.88	660.52	706.86	907.92	1017.88
9	0.00	254.47	380.13	452.39	660.52	754.77	804.25
Média	0.00	325.07	440.09	533.20	621.43	717.33	786.53
D.P.	0.00	110.61	130.65	166.04	172.05	181.23	185.63
C.V.	0.00	34.03	29.69	31.14	27.69	25.26	23.60

- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 2,94 \text{ N/s}$

Imposição	0.00	6.47	12.95	19.42	25.90	32.37	38.85
-----------	------	------	-------	-------	-------	-------	-------

Deformação (mm)							
Rep.	Tempo (s)						
	0	2	4	6	8	10	12
1	0.00	14.72	26.98	49.05	53.96	62.59	68.67
2	0.00	4.91	13.54	22.07	39.24	46.60	52.78
3	0.00	9.81	19.62	36.79	58.86	69.95	80.93
4	0.00	8.63	22.07	34.34	49.05	56.41	65.04
5	0.00	17.17	34.34	49.05	66.22	73.58	82.21
6	0.00	9.81	26.98	44.15	61.31	71.12	78.48
7	0.00	14.72	36.79	51.50	73.58	83.39	92.02
8	0.00	17.17	38.06	53.96	74.85	85.84	95.65
9	0.00	7.36	17.17	31.88	49.05	58.86	67.49
Resp. Média	0.00	11.59	26.17	41.42	58.46	67.59	75.92
D.P.	0.00	11.24	26.08	40.57	58.96	68.15	76.72
C.V.	0.00	97.00	99.66	97.95	100.86	100.82	101.06

Área (mm <sup>2</sup> )							
Rep.	Tempo (s)						
	0	2	4	6	8	10	12
1	0.00	314.16	380.13	452.39	530.93	615.75	706.86
2	0.00	176.72	226.98	283.53	346.36	380.13	452.39
3	0.00	254.47	380.13	452.39	530.93	660.52	754.77
4	0.00	283.53	346.36	415.48	490.88	615.75	706.86
5	0.00	254.47	314.16	380.13	452.39	615.75	706.86
6	0.00	415.48	530.93	615.75	706.86	804.25	855.30
7	0.00	415.48	530.93	615.75	706.86	804.25	962.12
8	0.00	380.13	490.88	572.56	706.86	804.25	907.92
9	0.00	226.98	283.53	346.36	415.48	490.88	615.75
Média	0.00	302.38	387.11	459.37	543.06	643.50	740.98
D.P.	0.00	85.29	109.31	119.22	135.41	146.96	155.12
C.V.	0.00	28.20	28.24	25.95	24.94	22.84	20.93

- Senoide -  $\dot{F}_{11}(t) = 9,81 \text{ N/s}$

Imposição (Kgf)	0.0	9.8	19.6	29.4	39.2	49.1	39.2	29.4	19.6	9.8	0.0
-----------------	-----	-----	------	------	------	------	------	------	------	-----	-----

Repet.	Deformação (mm)										
	Tempo (s)										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	19.6	37.3	52.0	67.7	81.4	81.4	75.5	66.7	53.0	22.6
2	0	21.6	41.2	57.9	73.6	92.2	90.3	84.4	75.5	59.8	26.5
3	0	22.6	45.1	65.7	82.4	103.0	100.1	94.2	84.4	65.7	33.4
4	0	19.6	43.2	64.7	80.4	101.0	100.1	94.2	86.3	69.7	38.3
5	0	27.5	57.9	77.5	94.2	108.9	107.9	103.0	92.2	75.5	39.2
6	0	25.5	48.1	67.7	83.4	103.0	101.0	95.2	88.3	73.6	41.2
7	0	24.5	45.1	61.8	78.5	98.1	95.2	89.3	80.4	65.7	27.5
8	0	29.4	48.1	70.6	89.3	107.9	105.9	101.0	93.2	78.5	41.2
9	0	28.4	39.2	54.9	72.6	89.3	86.3	79.5	68.7	54.0	21.6
10	0	29.4	63.8	88.3	111.8	134.4	134.4	130.5	123.6	108.9	46.1
Resp. Média (mm)	0.00	24.82	46.89	66.12	83.39	101.93	100.26	94.67	85.94	70.44	33.75
D.P.	0.00	3.84	8.24	10.84	12.71	14.26	14.65	15.37	16.07	16.03	8.69
C.V.	0.00	15.48	17.58	16.39	15.24	13.99	14.61	16.23	18.71	22.76	25.75

Repet.	Área (mm <sup>2</sup> )					
	Tempo (s)					
	0	2	4	6	8	10
1	0	490.88	706.86	660.52	380.13	0.0
2	0	490.88	754.77	706.86	380.13	0.0
3	0	572.56	855.3	804.25	490.88	0.0
4	0	660.52	907.92	804.25	346.36	0.0
5	0	660.52	1134.1	1075.2	615.75	0.0
6	0	706.86	962.12	855.3	380.13	0.0
7	0	572.56	754.77	754.77	380.13	0.0
8	0	615.75	855.3	804.25	452.39	0.0
9	0	415.48	572.56	615.75	314.16	0.0
10	0	907.92	1320.3	1194.6	452.39	0.0
Média	0.00	609.39	882.40	827.58	419.25	0.00
D.P.	0.00	138.36	216.78	179.84	87.19	0.00
C.V.	0.00	22.71	24.57	21.73	20.80	0.00

### A.1.2) Deformação controlada - $U_{11}(t)$

- Quadrada -  $\dot{U}_{11}(t) = 5,0 \text{ mm/s}$

Imposição (mm)	0	8	8	8	8	0
----------------	---	---	---	---	---	---

Força (N)						
Repetição	Tempo (s)					
	0	0.4	1	2	3	4
1	0	39.24	31.39	29.43	27.47	0.00
2	0	46.11	38.26	36.30	35.32	0.00
3	0	27.47	22.56	20.60	19.62	0.00
4	0	76.52	61.80	57.88	56.90	0.00
5	0	51.99	40.22	38.26	37.28	0.00
6	0	25.51	20.60	18.64	17.66	0.00
7	0	76.52	59.84	56.90	55.92	0.00
8	0	25.51	19.62	17.66	17.66	0.00
9	0	74.56	58.86	56.90	54.94	0.00
10	0	49.05	41.20	40.22	39.24	0.00
Média	0	49.25	39.44	37.28	36.20	0.00
D.P.	0	20.68	16.32	15.91	15.70	0.00
C.V.	0	41.98	41.37	42.67	43.37	0.00

Área (mm <sup>2</sup> )				
Repetição	Tempo (s)			
	0	1	3	5
1	0	706.86	706.86	0.00
2	0	572.56	572.56	0.00
3	0	530.93	530.93	0.00
4	0	615.75	615.75	0.00
5	0	660.52	660.52	0.00
6	0	615.75	615.75	0.00
7	0	572.56	572.56	0.00
8	0	706.86	706.86	0.00
9	0	660.52	660.52	0.00
10	0	615.75	615.75	0.00
Média	0	625.81	625.81	0.00
D.P.	0	58.24	58.24	0.00
C.V.	0	9.31	9.31	0.00

- Senoide -  $\dot{U}_{11}(t) = 1,6 \text{ mm/s}$

Imposição (mm)	0	2	4	6	8	6	4	2	0
----------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Força (N)									
Repetição	Tempo (s)								
	0	1.25	2.5	3.75	5	6.25	7.5	8.75	10
1	0	11.77	22.56	34.34	48.07	19.62	7.848	1.962	0
2	0	5.89	19.62	29.43	39.24	16.68	5.886	1.962	0
3	0	9.81	18.64	28.45	37.28	13.73	5.886	1.962	0
4	0	11.77	28.45	45.13	58.86	22.56	8.829	1.962	0
5	0	5.89	15.70	25.51	37.28	13.73	3.924	0	0
6	0	5.89	14.72	23.54	31.39	9.81	1.962	0	0
7	0	7.85	17.66	27.47	37.28	11.77	3.924	0	0
8	0	7.85	13.73	20.60	27.47	9.81	3.924	0	0
9	0	7.85	17.66	27.47	39.24	15.70	5.886	0	0
10	0	9.81	19.62	29.43	35.32	11.77	3.924	0	0
Média	0	8.44	18.84	29.14	39.14	14.52	5.20	0.78	0.00
D.P.	0	2.27	4.26	6.72	8.76	4.18	2.07	1.01	0.00
C.V.	0	26.97	22.61	23.06	22.37	28.81	1.00	2.00	0.00

Área (mm <sup>2</sup> )					
Repetição	Tempo (s)				
	0	2	4	6	8
1	0	490.88	530.93	283.53	0.00
2	0	490.88	530.93	226.98	0.00
3	0	346.36	490.88	201.06	0.00
4	0	490.88	615.75	380.13	0.00
5	0	415.48	572.56	283.53	0.00
6	0	572.56	660.52	254.47	0.00
7	0	572.56	615.75	201.06	0.00
8	0	530.93	706.86	490.88	0.00
9	0	415.48	615.75	254.47	0.00
10	0	452.39	615.75	415.48	0.00
Média	0	477.84	595.57	299.16	0.00
D.P.	0	72.25	65.05	97.63	0.00
C.V.	0	15.12	10.92	32.63	0.00



- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,28 \text{ mm/s}$

Tempo (s)	Força (N)										Média	D.P.	C.V.
	1a Rep.	2a Rep.	3a Rep.	4a Rep.	5a Rep.	6a Rep.	7a Rep.	8a Rep.	9a Rep.	10a Rep.			
2	1.7723	1.0059	0.4790	0.6227	1.4370	3.6883	1.6286	1.7723	1.5328	5.1253	1.9064	1.4340	75.2166
4	5.3169	3.9278	3.2572	3.0656	4.4547	6.6582	3.9757	4.5505	4.3589	7.5204	4.7066	1.4237	30.2351
6	8.4305	6.5624	6.2750	5.5085	7.2330	9.9633	6.6582	6.8019	6.8977	9.9633	7.4294	1.5249	20.5251
8	11.9272	9.3885	9.3885	7.6162	9.9633	13.4600	9.2927	9.5322	9.8196	12.0709	10.2459	1.7177	16.7644
10	15.7113	12.2625	12.6936	10.0112	13.1726	17.0046	11.5919	12.6936	12.6457	14.2743	13.2061	2.0108	15.2263
12	19.8787	14.5138	16.1424	12.3583	16.6214	20.7409	14.6096	15.9029	15.7113	16.6214	16.3101	2.4686	15.1357

Tempo (s)	Deformação (mm)										Média	D.P.	C.V.
	1ª Rep.	2ª Rep.	3ª Rep.	4ª Rep.	5ª Rep.	6ª Rep.	7ª Rep.	8ª Rep.	9ª Rep.	10ª Rep.			
2	0.560	0.560	0.560	0.560	0.560	0.560	0.560	0.560	0.560	0.560	0.5600	0.0000	0.0000
4	1.120	1.120	1.120	1.120	1.120	1.120	1.120	1.120	1.120	1.120	1.1200	0.0000	0.0000
6	1.680	1.680	1.680	1.680	1.680	1.680	1.680	1.680	1.680	1.680	1.6800	0.0000	0.0000
8	2.240	2.240	2.240	2.240	2.240	2.240	2.240	2.240	2.240	2.240	2.2400	0.0000	0.0000
10	2.800	2.800	2.800	2.800	2.800	2.800	2.800	2.800	2.800	2.800	2.8000	0.0000	0.0000
12	3.360	3.360	3.360	3.360	3.360	3.360	3.360	3.360	3.360	3.360	3.3600	0.0000	0.0000

t (s)	Área (mm <sup>2</sup> )										Média	D.P.	C.V.
	1ª Rep.	2ª Rep.	3ª Rep.	4ª Rep.	5ª Rep.	6ª Rep.	7ª Rep.	8ª Rep.	9ª Rep.	10ª Rep.			
2	50.3	63.6	50.3	63.6	63.6	50.3	63.6	95.0	50.3	113.1	66.4	21.3	32.1
4	95.0	95.0	78.5	95.0	113.1	95.0	113.1	132.7	95.0	153.9	106.7	22.3	20.9
6	113.1	132.7	113.1	113.1	153.9	132.7	132.7	153.9	132.7	201.1	137.9	26.8	19.4
8	132.7	153.9	132.7	132.7	176.7	153.9	153.9	176.7	153.9	254.5	162.2	36.2	22.3
10	153.9	201.1	176.7	176.7	201.1	176.7	201.1	227.0	176.7	283.5	197.4	36.4	18.4
12	176.7	254.5	227.0	227.0	240.5	227.0	227.0	283.5	227.0	314.2	240.4	37.2	15.5

- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,33 \text{ mm/s}$

Tempo (s)	Força (N)										Média	D.P.	C.V.
	1ª Rep.	2ª Rep.	3ª Rep.	4ª Rep.	5ª Rep.	6ª Rep.	7ª Rep.	8ª Rep.	9ª Rep.	10ª Rep.			
2	2.0597	2.2034	2.1076	2.2034	3.3530	1.3891	2.2992	3.1614	2.6345	1.2933	2.2705	0.6592	29.0326
4	4.7421	6.4666	7.7599	5.4606	7.9994	5.3169	5.7959	7.9036	7.8557	5.5085	6.4809	1.2776	19.7125
6	7.9515	10.5381	13.5079	8.7658	13.0289	9.6280	10.0591	12.3104	13.7953	9.8675	10.9452	2.0671	18.8858
8	11.6398	14.8970	19.4476	12.5020	18.2021	13.9869	14.1785	17.0046	19.9266	14.8970	15.6682	2.8502	18.1909
10	15.7113	19.6871	26.0578	16.2382	23.8544	18.9207	18.6333	22.0342	26.3452	20.2140	20.7696	3.7379	17.9972
12	20.3577	24.6687	33.1471	21.0762	29.5545	24.2376	23.6149	27.9259	32.4765	25.5788	26.2638	4.4159	16.8135

Tempo (s)	Deformação (mm)										Média	D.P.	C.V.
	1ª Rep.	2ª Rep.	3ª Rep.	4ª Rep.	5ª Rep.	6ª Rep.	7ª Rep.	8ª Rep.	9ª Rep.	10ª Rep.			
2	0.660	0.660	0.660	0.660	0.660	0.660	0.660	0.660	0.660	0.660	0.6600	0.0000	0.0000
4	1.320	1.320	1.320	1.320	1.320	1.320	1.320	1.320	1.320	1.320	1.3200	0.0000	0.0000
6	1.980	1.980	1.980	1.980	1.980	1.980	1.980	1.980	1.980	1.980	1.9800	0.0000	0.0000
8	2.640	2.640	2.640	2.640	2.640	2.640	2.640	2.640	2.640	2.640	2.6400	0.0000	0.0000
10	3.300	3.300	3.300	3.300	3.300	3.300	3.300	3.300	3.300	3.300	3.3000	0.0000	0.0000
12	3.960	3.960	3.960	3.960	3.960	3.960	3.960	3.960	3.960	3.960	3.9600	0.0000	0.0000

t (s)	Área (mm <sup>2</sup> )										Média	D.P.	C.V.
	1ª Rep.	2ª Rep.	3ª Rep.	4ª Rep.	5ª Rep.	6ª Rep.	7ª Rep.	8ª Rep.	9ª Rep.	10ª Rep.			
2	95.0	113.1	78.5	113.1	78.5	95.0	63.6	50.3	78.5	50.3	81.6	22.8	27.9
4	132.7	132.7	113.1	153.9	113.1	132.7	95.0	78.5	132.7	95.0	118.0	23.1	19.6
6	176.7	176.7	153.9	227.0	153.9	176.7	132.7	113.1	176.7	153.9	164.1	30.7	18.7
8	227.0	254.5	201.1	254.5	201.1	201.1	153.9	176.7	201.1	201.1	207.2	31.3	15.1
10	254.5	314.2	254.5	314.2	254.5	227.0	201.1	201.1	254.5	254.5	253.0	38.8	15.3
12	283.5	346.4	314.2	380.1	314.2	283.5	254.5	227.0	314.2	314.2	303.2	43.7	14.4

- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,84 \text{ mm/s}$

Tempo (s)	Força (N)										Média	D.P.	C.V.
	1ª Rep.	2ª Rep.	3ª Rep.	4ª Rep.	5ª Rep.	6ª Rep.	7ª Rep.	8ª Rep.	9ª Rep.	10ª Rep.			
2	6.658	5.700	7.568	7.904	6.610	4.503	9.149	6.802	5.748	5.173	6.582	1.380	20.971
4	18.384	13.843	19.112	19.974	15.424	10.778	23.375	17.771	16.047	13.412	16.813	3.668	21.817
6	31.902	23.998	33.003	34.345	25.387	17.819	41.578	30.656	27.926	23.663	29.028	6.722	23.157
8	48.140	36.548	49.529	52.403	38.368	26.297	62.510	46.415	42.344	35.925	43.848	10.193	23.247
10	68.162	52.164	69.264	73.240	54.511	36.213	88.520	65.432	59.636	51.110	61.825	14.429	23.339
12	91.633	70.701	91.777	97.477	73.192	47.900	117.835	87.610	80.760	69.312	82.820	19.054	23.006

Tempo (s)	Deformação (mm)										Média	D.P.	C.V.
	1ª Rep.	2ª Rep.	3ª Rep.	4ª Rep.	5ª Rep.	6ª Rep.	7ª Rep.	8ª Rep.	9ª Rep.	10ª Rep.			
2	1.680	1.680	1.680	1.680	1.680	1.680	1.680	1.680	1.680	1.680	1.6800	0.0000	0.0000
4	3.360	3.360	3.360	3.360	3.360	3.360	3.360	3.360	3.360	3.360	3.3600	0.0000	0.0000
6	5.040	5.040	5.040	5.040	5.040	5.040	5.040	5.040	5.040	5.040	5.0400	0.0000	0.0000
8	6.720	6.720	6.720	6.720	6.720	6.720	6.720	6.720	6.720	6.720	6.7200	0.0000	0.0000
10	8.400	8.400	8.400	8.400	8.400	8.400	8.400	8.400	8.400	8.400	8.4000	0.0000	0.0000
12	10.080	10.080	10.080	10.080	10.080	10.080	10.080	10.080	10.080	10.080	10.0800	0.0000	0.0000

t (s)	Área (mm <sup>2</sup> )										Média	D.P.	C.V.
	1ª Rep.	2ª Rep.	3ª Rep.	4ª Rep.	5ª Rep.	6ª Rep.	7ª Rep.	8ª Rep.	9ª Rep.	10ª Rep.			
2	176.7	0.0	132.7	132.7	132.7	113.1	132.7	132.7	132.7	132.7	121.9	45.7	37.5
4	314.2	0.0	254.5	227.0	254.5	176.7	227.0	283.5	283.5	254.5	227.5	88.4	38.8
6	415.5	0.0	346.4	346.4	346.4	254.5	346.4	380.1	380.1	415.5	323.1	122.4	37.9
8	530.9	0.0	415.5	452.4	452.4	346.4	452.4	530.9	490.9	572.6	424.4	162.5	38.3
10	615.8	0.0	452.4	572.6	572.6	490.9	530.9	660.5	615.8	706.9	521.8	198.4	38.0
12	855.3	0.0	615.8	706.9	754.8	572.6	660.5	804.2	754.8	855.3	658.0	250.0	38.0

- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 1,23 \text{ mm/s}$

Tempo (s)	Força (N)										Média	D.P.	C.V.
	1ª Rep.	2ª Rep.	3ª Rep.	4ª Rep.	5ª Rep.	6ª Rep.	7ª Rep.	8ª Rep.	9ª Rep.	10ª Rep.			
2	13.967	8.718	10.825	9.867	8.957	8.814	11.975	7.185	8.957	11.065	10.035	1.965	19.586
4	37.602	26.345	29.555	26.872	26.345	24.285	33.722	21.028	24.956	30.273	28.098	4.840	17.225
6	70.222	51.062	55.804	50.822	50.774	45.266	63.372	40.763	47.038	56.762	53.189	8.720	16.395
8	112.614	84.544	90.244	82.245	83.442	73.000	101.501	67.492	75.156	92.208	86.245	13.566	15.730
10	160.371	124.445	129.858	118.793	124.541	104.231	146.431	100.687	107.536	134.217	125.111	18.813	15.037
12	177.854	167.220	169.855	158.790	171.388	135.031	191.458	133.211	135.462	169.855	161.012	20.052	12.454

Tempo (s)	Deformação (mm)										Média	D.P.	C.V.
	1ª Rep.	2ª Rep.	3ª Rep.	4ª Rep.	5ª Rep.	6ª Rep.	7ª Rep.	8ª Rep.	9ª Rep.	10ª Rep.			
2	2.460	2.460	2.460	2.460	2.460	2.460	2.460	2.460	2.460	2.460	2.4600	0.0000	0.0000
4	4.920	4.920	4.920	4.920	4.920	4.920	4.920	4.920	4.920	4.920	4.9200	0.0000	0.0000
6	7.380	7.380	7.380	7.380	7.380	7.380	7.380	7.380	7.380	7.380	7.3800	0.0000	0.0000
8	9.840	9.840	9.840	9.840	9.840	9.840	9.840	9.840	9.840	9.840	9.8400	0.0000	0.0000
10	12.300	12.300	12.300	12.300	12.300	12.300	12.300	12.300	12.300	12.300	12.3000	0.0000	0.0000
12	14.760	14.760	14.760	14.760	14.760	14.760	14.760	14.760	14.760	14.760	14.7600	0.0000	0.0000

t (s)	Área (mm <sup>2</sup> )										Média	D.P.	C.V.
	1ª Rep.	2ª Rep.	3ª Rep.	4ª Rep.	5ª Rep.	6ª Rep.	7ª Rep.	8ª Rep.	9ª Rep.	10ª Rep.			
2	176.7	227.0	314.2	227.0	227.0	176.7	227.0	227.0	201.1	254.5	225.8	39.5	17.5
4	380.1	415.5	452.4	346.4	380.1	346.4	346.4	415.5	346.4	415.5	384.5	38.5	10.0
6	572.6	615.8	706.9	530.9	572.6	530.9	572.6	615.8	530.9	615.8	586.5	54.7	9.3
8	754.8	706.9	855.3	706.9	855.3	706.9	754.8	855.3	804.2	804.2	780.5	62.8	8.0
10	855.3	907.9	1017.9	962.1	1075.2	907.9	907.9	1017.9	907.9	962.1	952.2	67.6	7.1
12	1134.1	1194.6	1194.6	1134.1	1256.6	1075.2	962.1	1134.1	1134.1	1134.1	1135.4	78.4	6.9

- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 1,59 \text{ mm/s}$

Tempo (s)	Força (N)										Média	D.P.	C.V.
	1ª Rep.	2ª Rep.	3ª Rep.	4ª Rep.	5ª Rep.	6ª Rep.	7ª Rep.	8ª Rep.	9ª Rep.	10ª Rep.			
2	12.358	11.496	17.292	12.358	13.460	14.849	15.855	16.047	13.795	15.855	14.337	1.929	13.455
4	39.853	34.632	53.744	35.207	41.721	45.170	44.116	46.511	43.446	46.032	43.043	5.631	13.083
6	79.227	70.126	109.021	67.492	82.484	90.675	85.981	90.771	85.933	91.729	85.344	11.813	13.841
8	124.493	118.410	180.201	112.135	129.618	150.695	139.151	149.258	141.785	155.820	140.157	20.169	14.390
10	183.842	171.819	60.115	161.137	185.470	178.908	188.680	193.565	165.352	149.353	163.824	38.927	23.761
12	84.305	91.442	0.335	172.489	63.133	23.040	59.444	28.118	28.453	8.766	55.952	51.253	91.601

Tempo (s)	Deformação (mm)										Média	D.P.	C.V.
	1ª Rep.	2ª Rep.	3ª Rep.	4ª Rep.	5ª Rep.	6ª Rep.	7ª Rep.	8ª Rep.	9ª Rep.	10ª Rep.			
2	3.180	3.180	3.180	3.180	3.180	3.180	3.180	3.180	3.180	3.180	3.1800	0.0000	0.0000
4	6.360	6.360	6.360	6.360	6.360	6.360	6.360	6.360	6.360	6.360	6.3600	0.0000	0.0000
6	9.540	9.540	9.540	9.540	9.540	9.540	9.540	9.540	9.540	9.540	9.5400	0.0000	0.0000
8	12.720	12.720	12.720	12.720	12.720	12.720	12.720	12.720	12.720	12.720	12.7200	0.0000	0.0000
10	15.900	15.900	15.900	15.900	15.900	15.900	15.900	15.900	15.900	15.900	15.9000	0.0000	0.0000
12	19.080	19.080	19.080	19.080	19.080	19.080	19.080	19.080	19.080	19.080	19.0800	0.0000	0.0000

[illegible]

## A.2) Ensaios com Borracha

### A.2.1) Força controlada - $F_{11}(t)$

- Senoide -  $\dot{F}_{11}(t) = 19,62 \text{ N/s}$

Rate 2 N/s	Tempo (s)										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Resposta (mm)	0.00	1.88	2.75	3.25	3.75	4.25	3.75	3.25	2.75	1.80	0.00
Imposição (N)	0.00	19.62	39.24	58.86	78.48	98.10	78.48	58.86	39.24	19.62	0.00

- Senoide -  $\dot{F}_{11}(t) = 24,53 \text{ N/s}$

Rate 2.5 N/s	Tempo (s)								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Resposta (mm)	0.00	2.00	3.00	3.75	4.25	3.75	3.00	2.00	0.00
Imposição (N)	0.00	24.53	49.05	73.58	98.10	73.58	49.05	24.53	0.00

- Senoide -  $\dot{F}_{11}(t) = 32,67 \text{ N/s}$

Rate 3.33 N/s	Tempo (s)						
	0	1	2	3	4	5	6
Resposta (mm)	0.00	2.38	3.50	4.25	3.50	2.38	0.00
Imposição (N)	0.00	32.67	65.33	98.00	65.33	32.67	0.00

- Senoide -  $\dot{F}_{11}(t) = 49,05 \text{ N/s}$

Rate 5 N/s	Tempo (s)				
	0	1	2	3	4
Resposta (mm)	0.00	3.00	4.25	3.00	0.00
Imposição (N)	0.00	49.05	98.10	49.05	0.00

- Senoide -  $\dot{F}_{11}(t) = 98,10 \text{ N/s}$

Rate 10 N/s	Tempo (s)		
	0	1	2
Resposta (mm)	0.00	4.25	0.00
Imposição (N)	0.00	98.10	0.00

- Senoide - Áreas

Rate	Tempo (s)					
	0	1	3	5	7	9
2.00	0.00	113.1	227.0	227.0	132.7	0.0
2.50	0.00	132.7	254.5	132.7	0.0	0.0
3.33	0.00	132.7	254.5	78.5	0.0	0.0
5.00	0.00	227.0	78.5	0.0	0.0	0.0
10.00	0.00	227.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Média	0.00	166.50	203.61	109.56	33.18	0.00
D.P.	0.00	55.79	116.76	96.04	59.36	0.00
C.V.	0.00	33.50	57.34	87.66	178.89	0.00

- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 19,62 \text{ N/s}$

Rate 2 N/s	Tempo (s)					
	0	1	2	3	4	5
Resposta (mm)	0.00	1.88	2.75	3.38	3.75	4.25
Imposição (N)	0.00	19.62	39.24	58.86	78.48	98.10

- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 15,70 \text{ N/s}$

Rate 1.6 N/s	Tempo (s)					
	0	1	2	3	4	5
Resposta (mm)	0.00	1.25	2.00	2.63	3.00	3.50
Imposição (N)	0.00	15.70	31.39	47.09	62.78	78.48

- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 11,77 \text{ N/s}$

Rate 1.2 N/s	Tempo (s)					
	0	1	2	3	4	5
Resposta (mm)	0.00	1.13	1.75	2.25	2.63	3.00
Imposição (N)	0.00	11.77	23.54	35.32	47.09	58.86

- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 7,85 \text{ N/s}$

Rate 0.8 N/s	Tempo (s)					
	0	1	2	3	4	5
Resposta (mm)	0.00	0.63	1.13	1.50	1.88	2.13
Imposição (N)	0.00	7.85	15.70	23.54	31.39	39.24

- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 3,92 \text{ N/s}$

Rate 0.4 N/s	Tempo (s)					
	0	1	2	3	4	5
Resposta (mm)	0.00	0.38	0.75	1.00	1.13	1.38
Imposição (N)	0.00	3.92	7.85	11.77	15.70	19.62



• Linear - Áreas

Área (mm <sup>2</sup> )	Tempo (s)					
	0	1	3	5	7	9
2	0.00	153.94	201.06	226.98	0.00	0.00
1.6	0.00	132.73	201.06	254.47	0.00	0.00
1.2	0.00	113.10	153.94	226.98	0.00	0.00
0.8	0.00	95.03	132.73	176.72	226.98	0.00
0.4	0.00	63.62	95.03	132.73	176.72	201.06
Média	0.00	111.68	172.20	221.29	56.75	0.00
D.P.	0.00	34.71	45.61	48.54	111.98	89.92
C.V.	0.00	31.08	26.49	21.94	197.33	0.00

• Quadrada -  $\dot{F}_{11}(t) = 159,86 \text{ N/s}$

Repetição	Resposta					
	Tempo (s)					
	0	1.25	2	3	4	5
1	0	3	3	3	3	0
2	0	3	3	3	3	0
3	0	3	3	3	3	0
4	0	3	3	3	3	0
Média	0	3	3	3	3	0
D.P.	0	0	0	0	0	0
C.V.	0	0	0	0	0	0

Imposição (N)	0	98.1	98.1	98.1	98.1	0
---------------	---	------	------	------	------	---

Área (mm <sup>2</sup> )	0	153.94	153.94	153.94	153.94	0
-------------------------	---	--------	--------	--------	--------	---

### A.2.2) Deformação controlada - $U_{11}(t)$

- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,28 \text{ mm/s}$

Tempo (s)	Área (mm <sup>2</sup> )	Força (N)	Deformação (mm)	Diâmetro (mm)
2	38.48	2.30	0.560	7.0
4	50.27	8.43	1.120	8.0
6	78.54	16.19	1.680	10.0
8	113.10	25.44	2.240	12.0
10	132.73	36.07	2.800	13.0
12	153.94	48.19	3.360	14.0
14	201.06	61.74	3.920	16.0
16	226.98	76.45	4.480	17.0
18	254.47	92.40	5.040	18.0
20	268.80	109.60	5.600	18.5
22	283.53	127.46	6.160	19.0
24	314.16	145.90	6.720	20.0
26	346.36	165.21	7.280	21.0
28	380.13	185.76	7.840	22.0
30	415.48	196.15	8.400	23.0
Média	217.20	86.49	4.48	15.90
D.P.	120.05	65.70	2.50	5.04
C.V.	55.27	75.96	55.90	31.72

- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,33 \text{ mm/s}$

Tempo (s)	Área (mm <sup>2</sup> )	Força (N)	Deformação (mm)	Diâmetro (mm)
2	50.27	0.81	0.660	8
4	113.10	4.98	1.320	12
6	153.94	18.01	1.980	14
8	176.72	35.35	2.640	15
10	226.98	56.91	3.300	17
12	254.47	82.44	3.960	18
14	314.16	111.56	4.620	20
16	380.13	142.93	5.280	22
Média	208.72	56.62	2.97	15.75
D.P.	107.71	51.91	1.62	4.50
C.V.	51.60	91.67	54.43	28.55

- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,84 \text{ mm/s}$

Tempo (s)	Área (mm <sup>2</sup> )	Força (N)	Deformação (mm)	Diâmetro (mm)
2	113.10	6.71	1.680	12
4	201.06	42.54	3.360	16
6	283.53	97.33	5.040	19
8	380.13	166.65	6.720	22
Média	244.46	78.31	4.20	17.25
D.P.	114.12	69.69	2.17	4.27
C.V.	46.69	89.00	51.64	24.77

- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 1,23 \text{ mm/s}$

Tempo (s)	Área (mm <sup>2</sup> )	Força (N)	Deformação (mm)	Diâmetro (mm)
1	95.03	0.7664	1.230	11
3	226.98	19.1602	3.690	17
5	346.36	90.0048	6.150	21
6	380.13	138.7195	7.380	22
Média	262.13	62.16	4.61	17.75
D.P.	129.33	63.91	2.73	4.99
C.V.	49.34	102.82	59.13	28.12

- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 1,59 \text{ mm/s}$

Tempo (s)	Área (mm <sup>2</sup> )	Força (N)	Deformação (mm)	Diâmetro (mm)
1	132.73	1.25	1.590	13
2	201.06	1.20	3.180	16
3	314.16	15.95	4.770	20
4	380.13	53.41	6.360	22
Média	257.02	17.95	3.98	17.75
D.P.	111.06	24.64	2.05	4.03
C.V.	43.21	137.25	51.64	22.71

- Senoide -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,80 \text{ mm/s}$

0.8 mm/s	Tempo (s)								
	0.00	1.25	2.50	3.75	5.00	6.25	7.50	8.75	10.00
Imposição (mm)	0.0	1.0	2.0	3.0	4.0	3.0	2.0	1.0	0.0
Resposta (N)	0.0	11.8	53.0	117.7	147.2	107.9	45.1	3.9	0.0

	Tempo (s)						
	0	1	3	5	7	9	11
Área (mm <sup>2</sup> )	0.0	63.6	176.7	283.5	176.7	63.6	0

- Senoide -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,67 \text{ mm/s}$

0.67 mm/s	Tempo (s)											
	0.00	1.25	2.50	3.75	5.00	6.00	6.25	7.50	8.75	10.00	11.25	12.50
Imposição (mm)	0.00	0.84	1.68	2.51	3.35	4.00	3.83	2.99	2.16	1.32	0.48	0.00
Resposta (N)	0.0	9.8	47.1	94.2	135.4	147.2	141.3	105.9	51.0	11.8	0.0	0.0

	Tempo (s)						
	0	2	4	6	8	10	12
Área (mm <sup>2</sup> )	0.0	95.0	176.7	283.5	176.7	95.0	0.0

- Senoide -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,57 \text{ mm/s}$

0.57 mm/s	Tempo (s)													
	0.00	1.25	2.50	3.75	5.00	6.25	7.00	7.50	8.75	10.00	11.25	12.50	13.75	14.00
Imposição (mm)	0.00	0.71	1.43	2.14	2.85	3.56	4.00	3.72	3.00	2.29	1.58	0.87	0.15	0.00
Resposta (N)	0.0	4.9	31.4	64.7	109.9	139.3	147.2	140.3	105.9	60.8	21.6	3.9	0.0	0.0

	Tempo (s)								
	0	1	3	5	7	9	11	13	15
Área (mm <sup>2</sup> )	0.0	78.5	132.7	201.1	283.5	201.1	113.1	50.3	0.0

- Senoide -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,50 \text{ mm/s}$

0.50 mm/s	Tempo (s)															
	0.00	1.25	2.50	3.75	5.00	6.25	7.50	8.00	8.75	10.00	11.25	12.50	13.75	15.00	16.25	
Imposição (mm)	0.00	0.63	1.25	1.88	2.50	3.13	3.75	4.00	3.63	3.00	2.38	1.75	1.13	0.50	0.00	
Resposta (N)	0.0	3.9	21.6	51.0	90.3	105.9	145.2	147.2	137.3	104.0	62.8	25.5	5.9	0.0	0.00	

	Tempo (s)								
	0	2	4	6	8	10	12	14	16
Área (mm <sup>2</sup> )	0.0	50.3	132.7	201.1	283.5	201.1	153.9	63.6	0.0

- Senoide -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,44 \text{ mm/s}$

0.44 mm/s	Tempo (s)																	
	0.00	1.25	2.50	3.75	5.00	6.25	7.50	8.75	9.00	10.00	11.25	12.50	13.75	15.00	16.25	17.50	18.00	
Imposição (mm)	0.00	0.55	1.10	1.65	2.20	2.75	3.30	3.85	4.00	3.56	3.01	2.46	1.91	1.36	0.81	0.26	0.00	
Resposta (N)	0.0	1.0	11.8	35.3	64.7	102.0	131.5	145.2	147.2	133.4	102.0	64.7	33.4	7.8	1.96	0.00	0	

	Tempo (s)										
	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
Área (mm <sup>2</sup> )	0.0	38.5	95.0	176.7	227.0	283.5	227.0	176.7	78.5	38.5	0.0

- Quadrada -  $\dot{U}_{11}(t) = 10,0 \text{ mm/s}$

Imposição (mm)	0	4	4	4	4	0
----------------	---	---	---	---	---	---

Repetição	Tempo (s)					
	0	0,4	1	2	3	4
1	0	115.76	111.83	109.87	109.87	0.00
2	0	107.91	95.16	93.20	93.20	0.00
3	0	88.29	92.21	84.37	84.37	0.00
4	0	84.37	84.37	80.44	79.46	0.00
5	0	83.39	81.42	79.46	78.48	0.00
Média	0	95.94	93.00	89.47	89.07	0.00
D.P.	0	14.88	11.92	12.63	13.00	0.00
C.V.	0	15.51	12.82	14.11	14.60	0.00

Área (mm <sup>2</sup> )	0	254.47	254.47	254.47	254.47	0
-------------------------	---	--------	--------	--------	--------	---

## B) Gráficos de $F_{11}(t)$ , $U_{11}(t)$ e $A(t)$

### B.1) Ensaio com Laranja

#### B.1.1) Força controlada - $F_{11}(t)$

- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 4,91 \text{ N/s}$

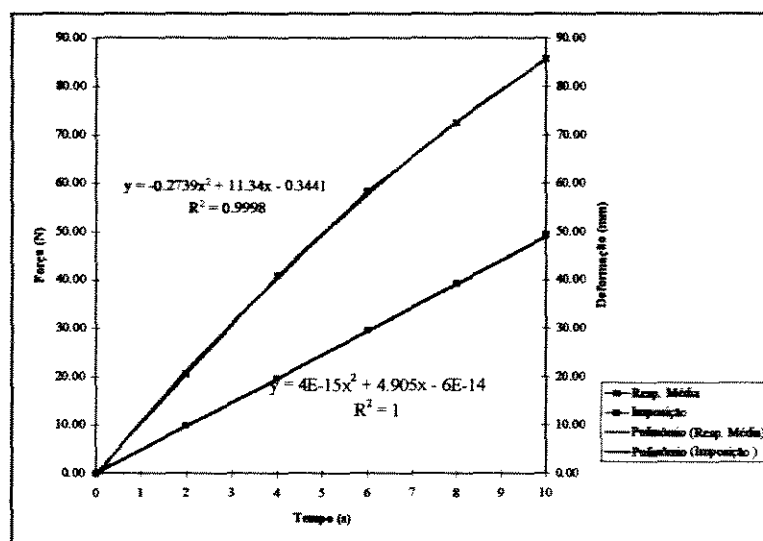


Gráfico 8.1 : Imposição x Resposta.

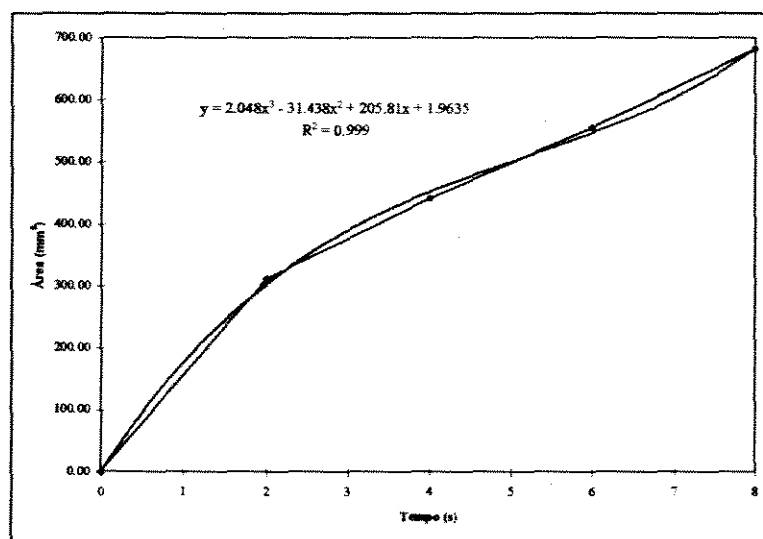


Gráfico 8.2 : Área x Tempo.

- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 3,92 \text{ N/s}$

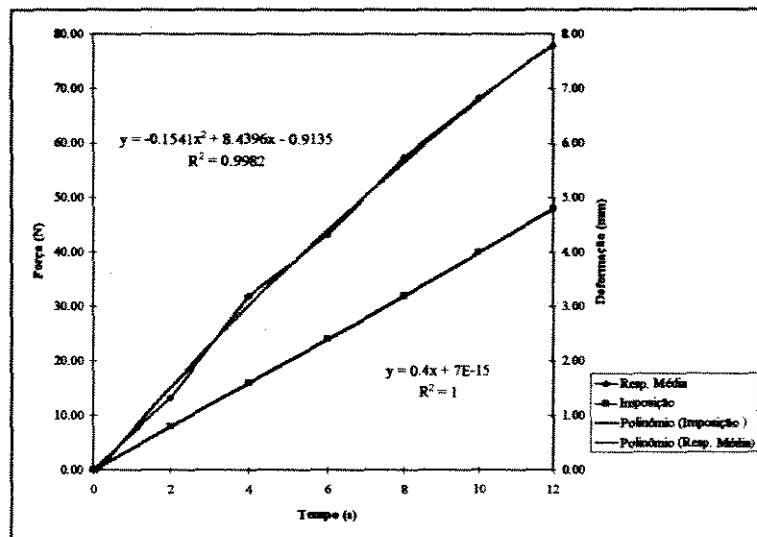


Gráfico 8.3 : Imposição x Resposta.

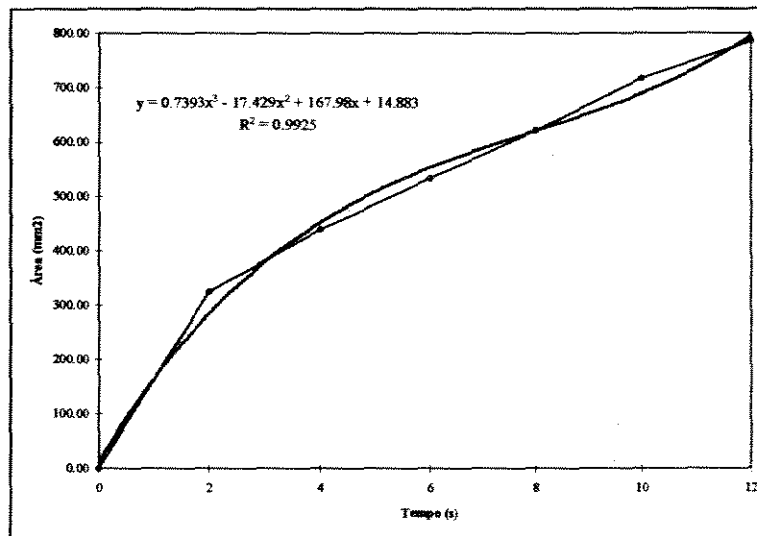


Gráfico 8.4 : Área x Tempo.



- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 2,94 \text{ N/s}$

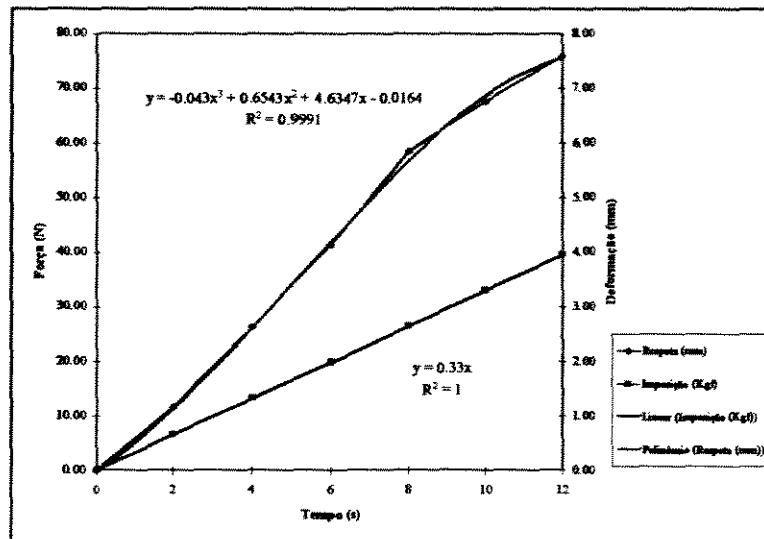


Gráfico 8.5 : Imposição x Resposta.

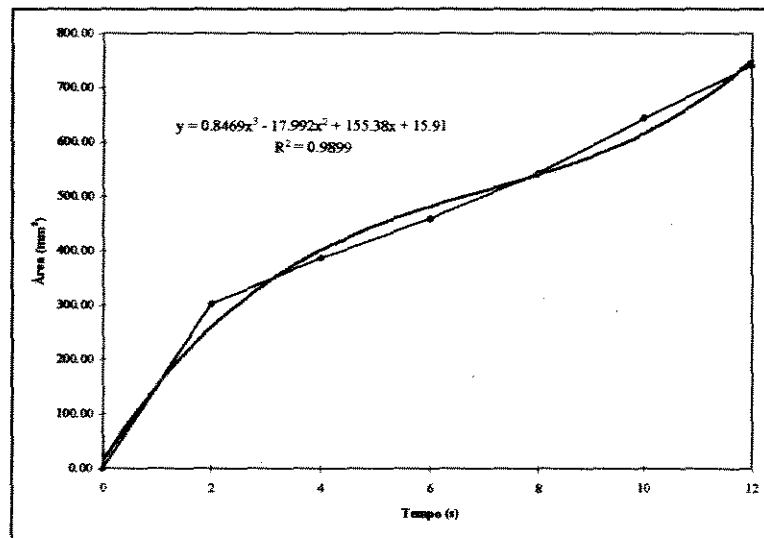


Gráfico 8.6 : Área x Tempo.

- Senoide -  $\dot{F}_{11}(t) = 9,81 \text{ N/s}$

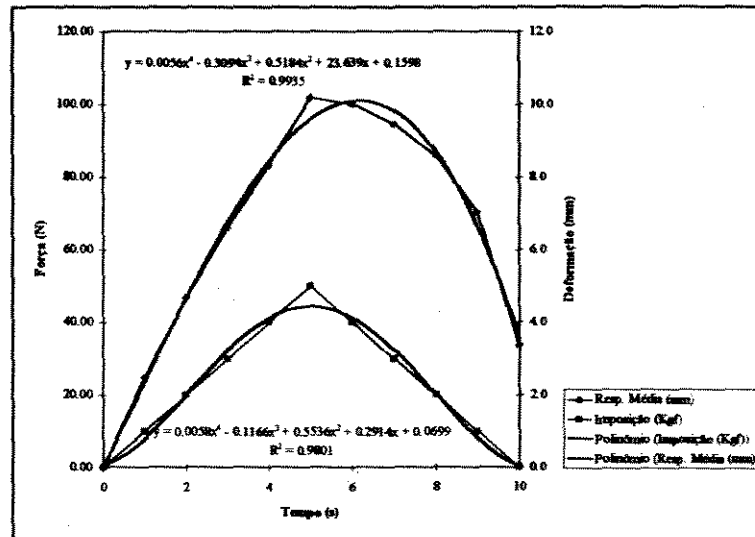


Gráfico 8.7 : Imposição x Resposta.

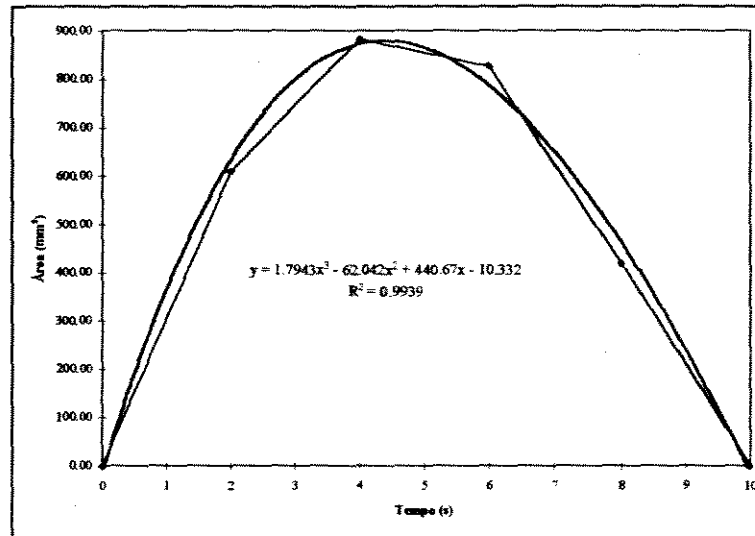


Gráfico 8.8 : Área x Tempo.

### B.1.2. Deformação controlada - $U_{11}(t)$

- Quadrada -  $\dot{U}_{11}(t) = 5,0 \text{ mm/s}$

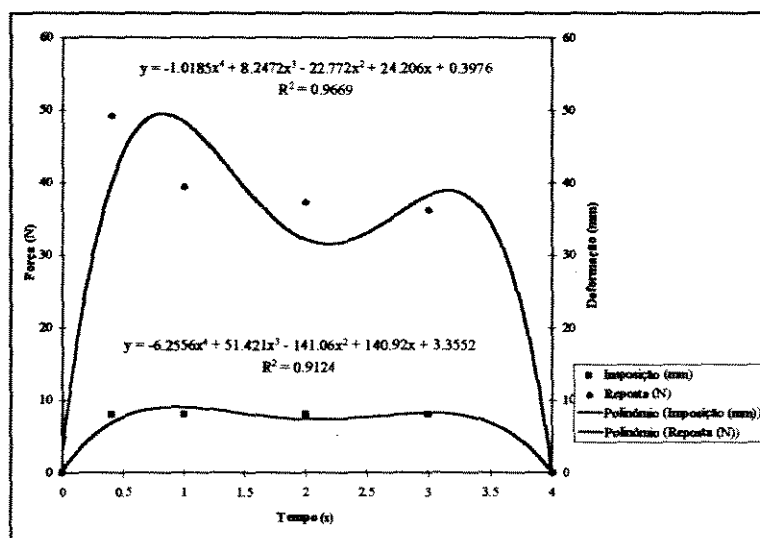


Gráfico 8.9 : Imposição x Resposta.

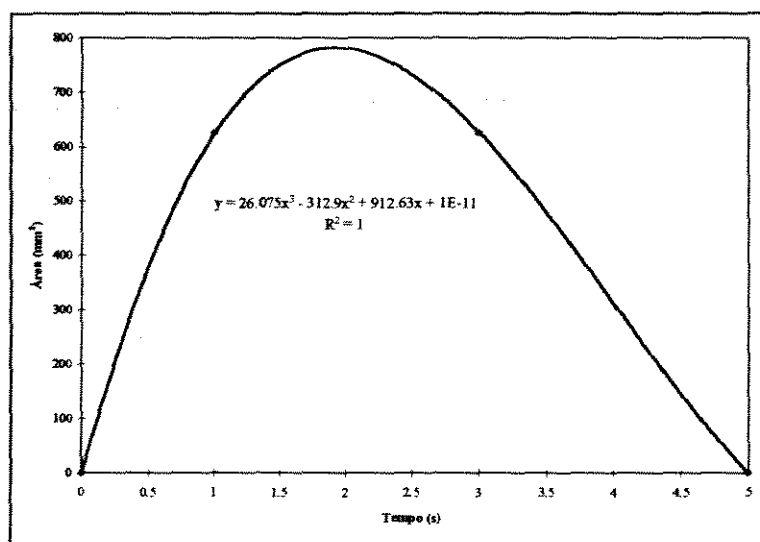


Gráfico 8.10 : Área x Tempo.

- Senoide -  $\dot{U}_{11}(t) = 1,6 \text{ mm/s}$

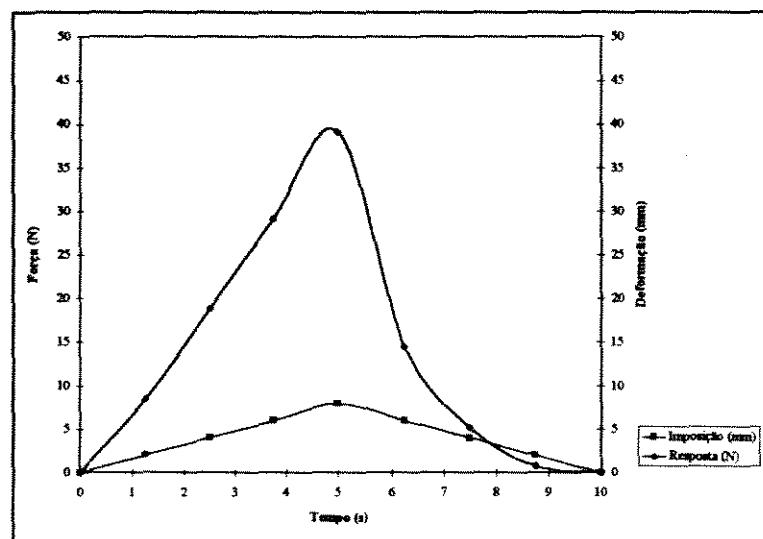


Gráfico 8.11 : Imposição x Resposta.

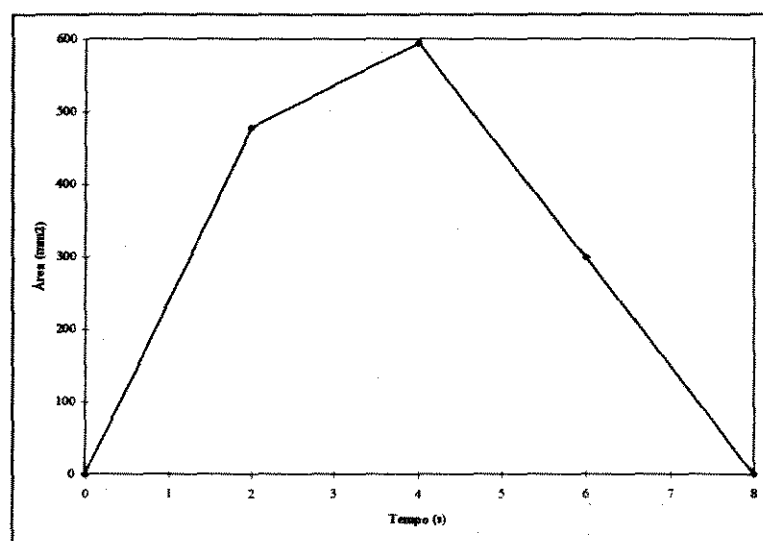


Gráfico 8.12 : Área x Tempo.

- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,28 \text{ mm/s}$

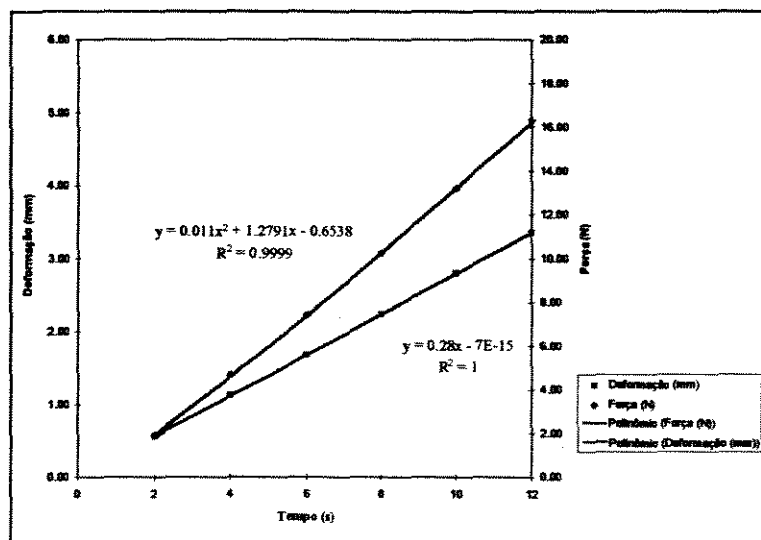


Gráfico 8.13 : Imposição x Resposta.

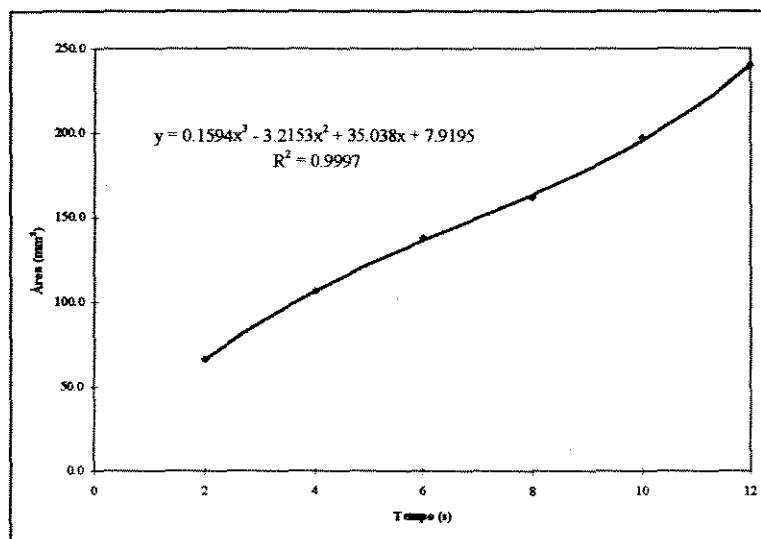


Gráfico 8.14 : Área x Tempo.

- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,33 \text{ mm/s}$

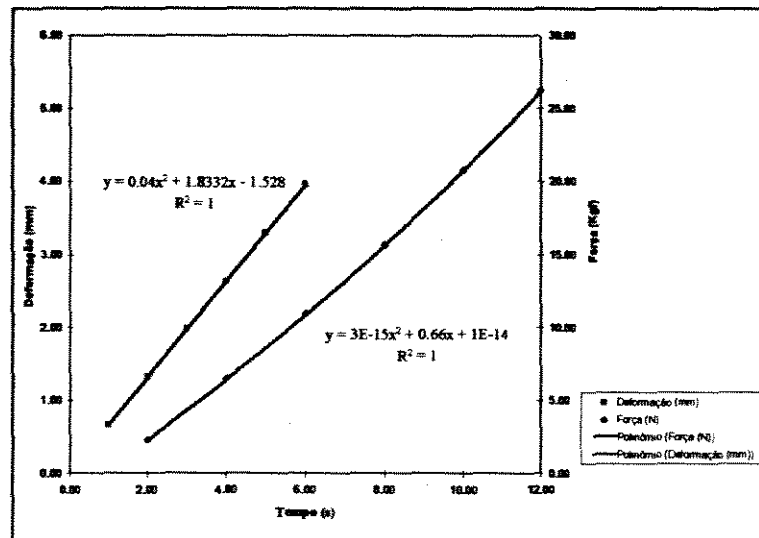


Gráfico 8.15 : Imposição x Resposta.

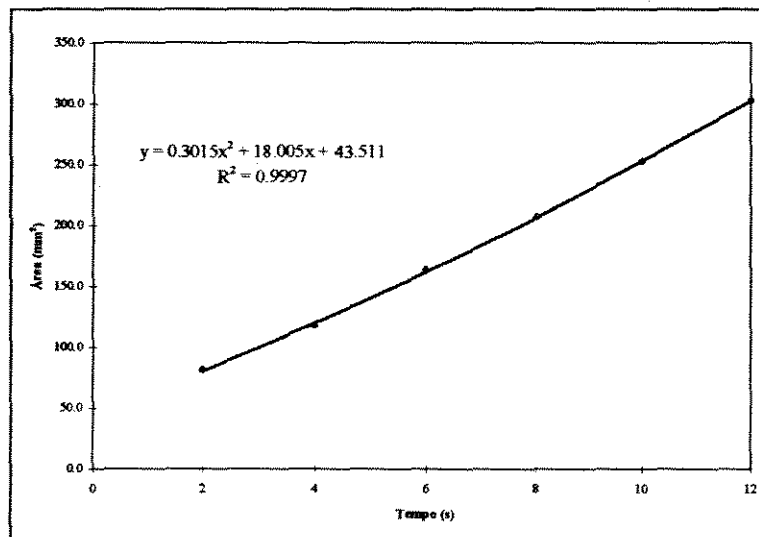


Gráfico 8.16 : Área x Tempo.

- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,84 \text{ mm/s}$

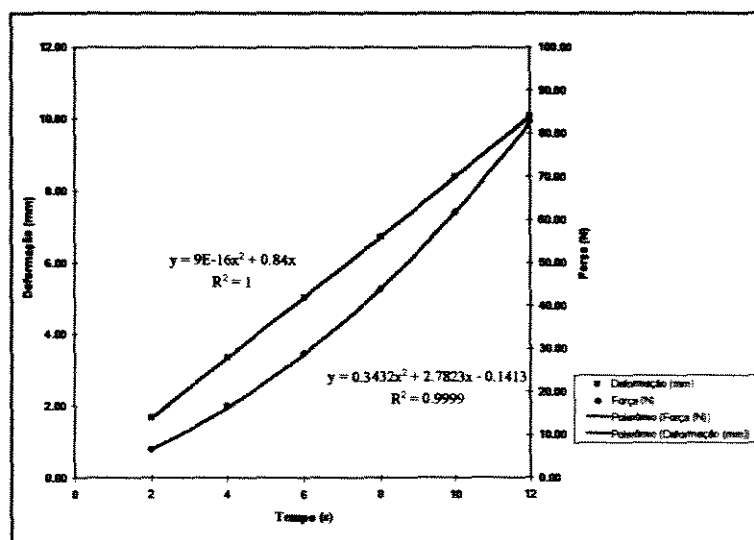


Gráfico 8.17 : Imposição x Resposta.

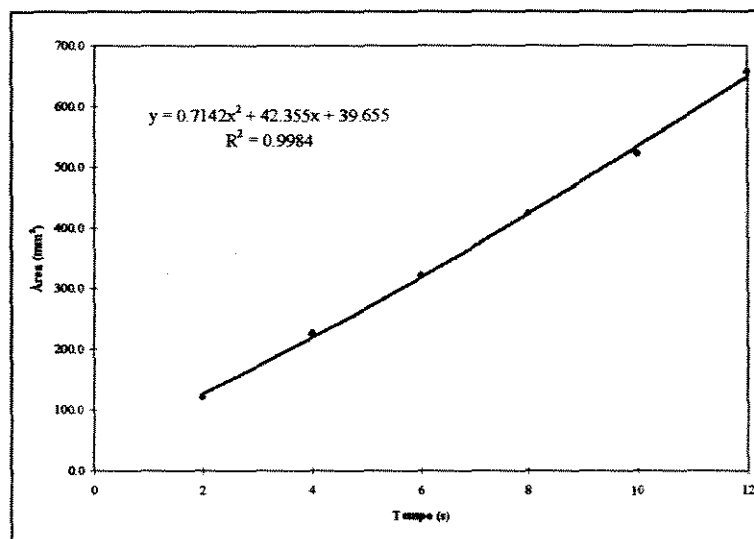


Gráfico 8.18 : Área x Tempo.

- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 1,23 \text{ mm/s}$

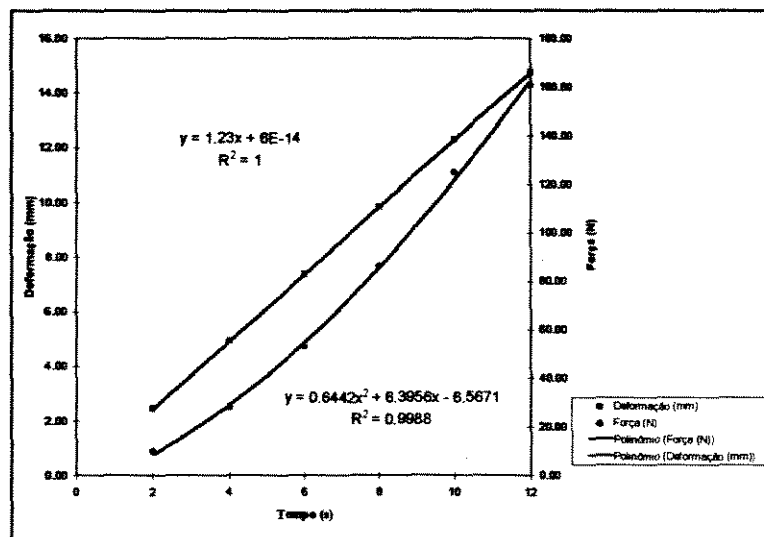


Gráfico 8.19 : Imposição x Resposta.

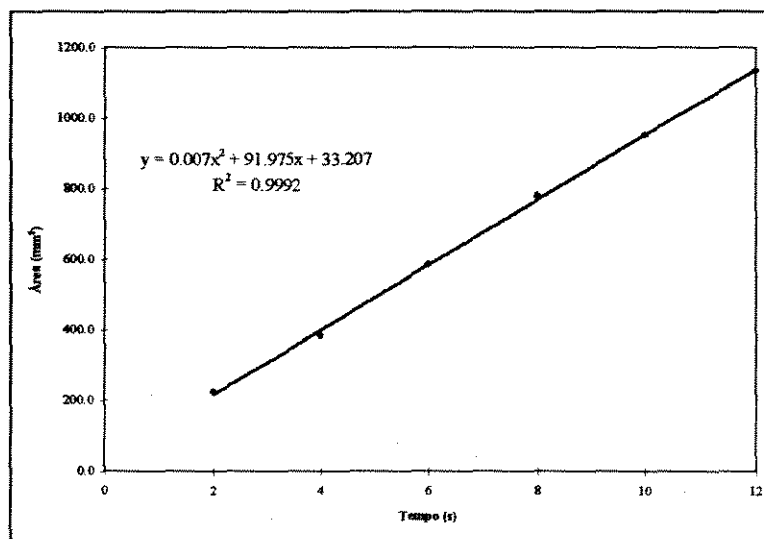


Gráfico 8.20 : Área x Tempo.



- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 1,59 \text{ mm/s}$

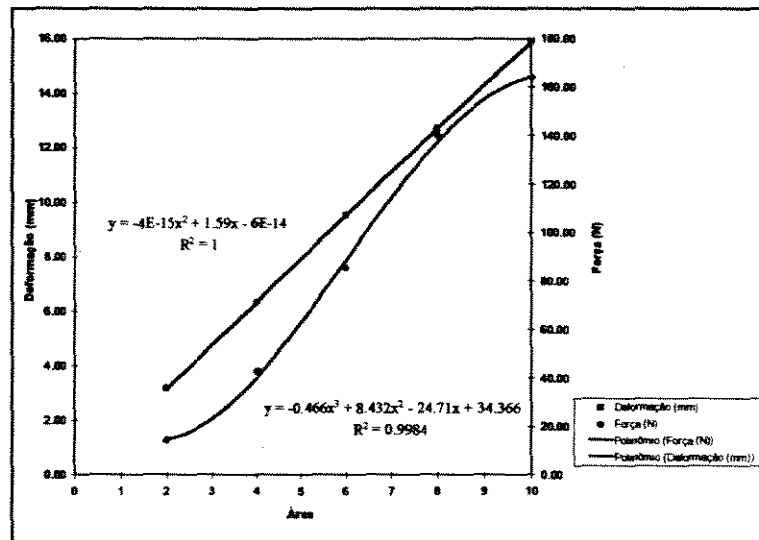


Gráfico 8.21 : Imposição x Resposta.

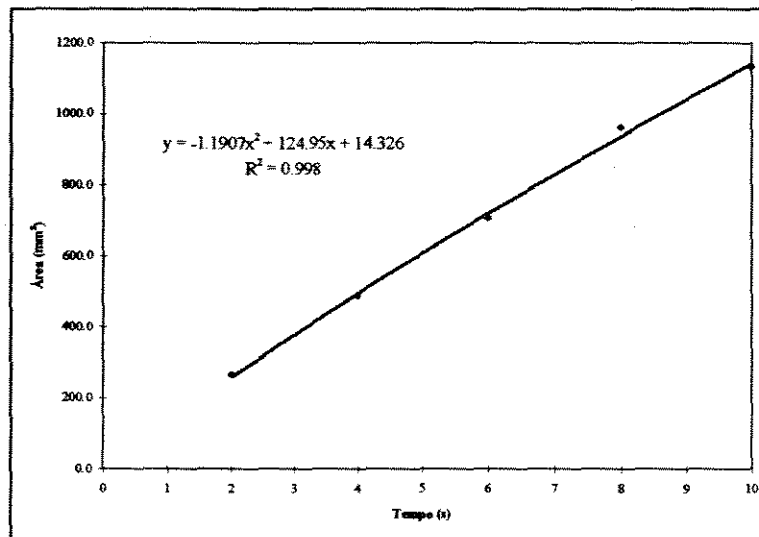


Gráfico 8.22 : Área x Tempo.

## B.2) Ensaaios com Borracha

### B.2.1) Força controlada - $F_{11}(t)$

- Senoide -  $\dot{F}_{11}(t) = 19,62 \text{ N/s}$

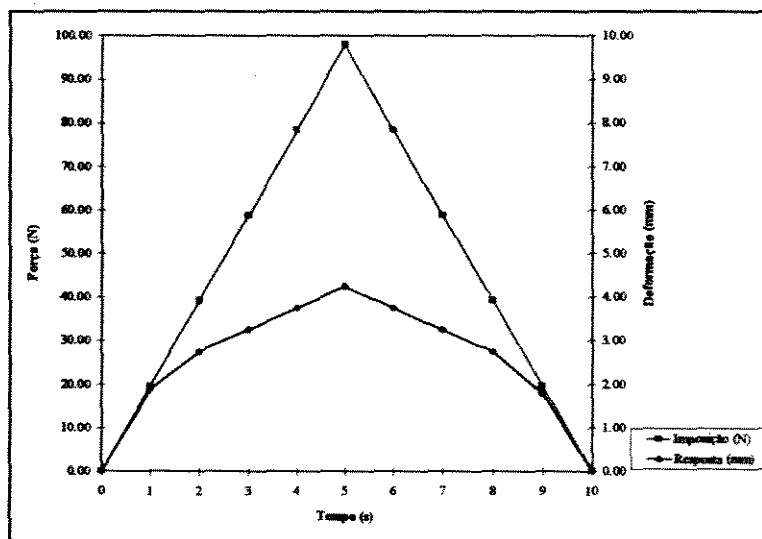


Gráfico 8.23 : Imposição x Resposta.

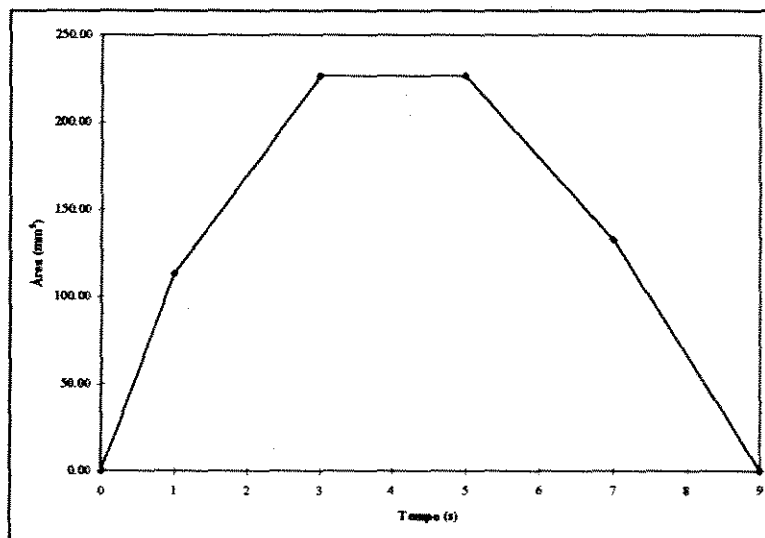


Gráfico 8.24 : Área x Tempo.

- Senoide -  $\dot{F}_{11}(t) = 24,53 \text{ N/s}$

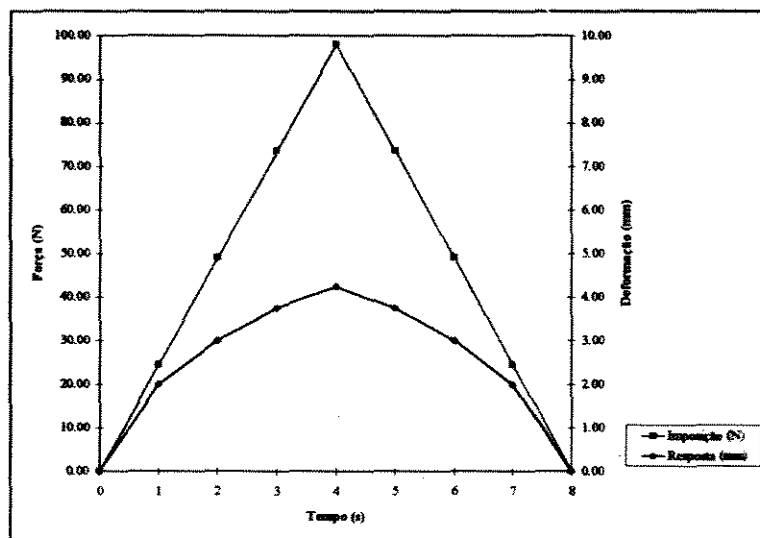


Gráfico 8.25 : Imposição x Resposta.

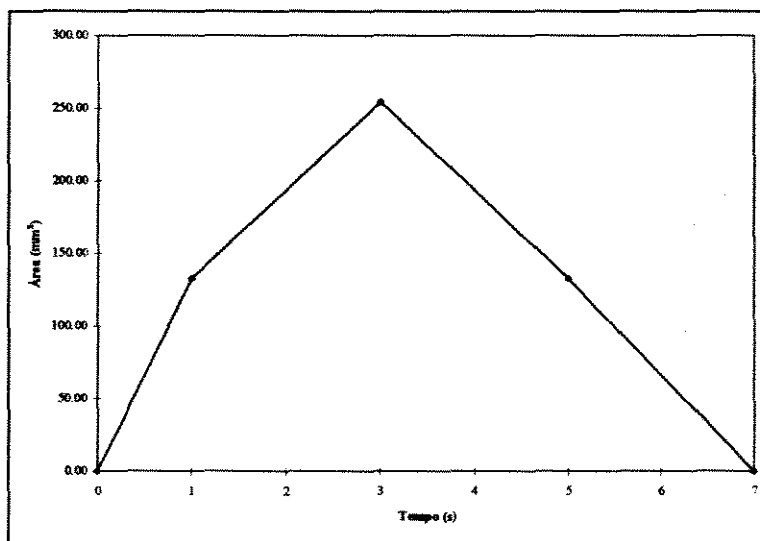


Gráfico 8.26 : Área x Tempo.

- Senoide -  $\dot{F}_{11}(t) = 32,67 \text{ N/s}$

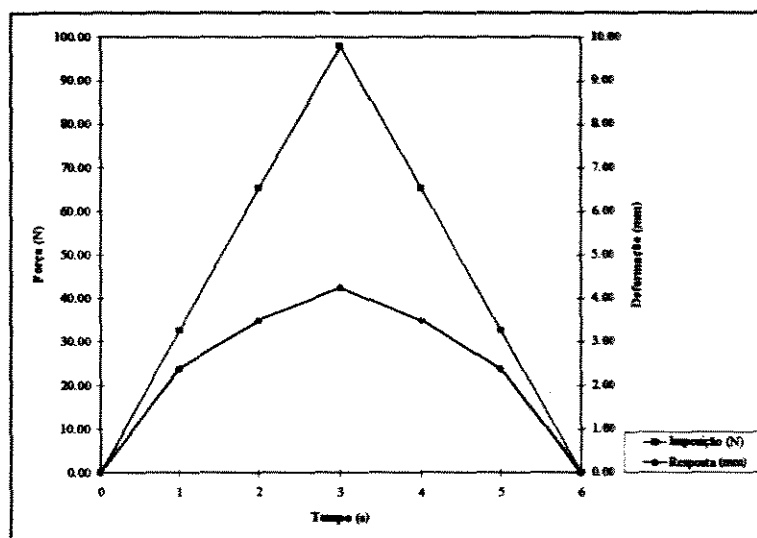


Gráfico 8.27 : Imposição x Resposta.

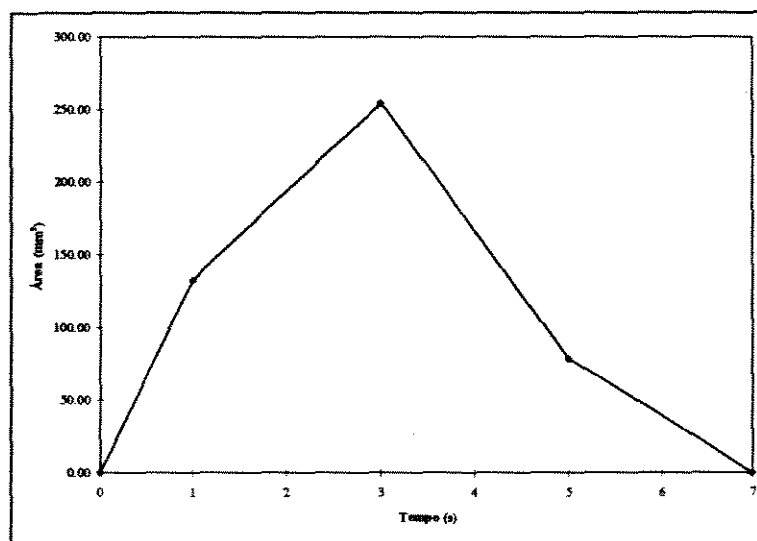


Gráfico 8.28 : Área x Tempo.

- Senoide -  $\dot{F}_{11}(t) = 49,05 \text{ N/s}$

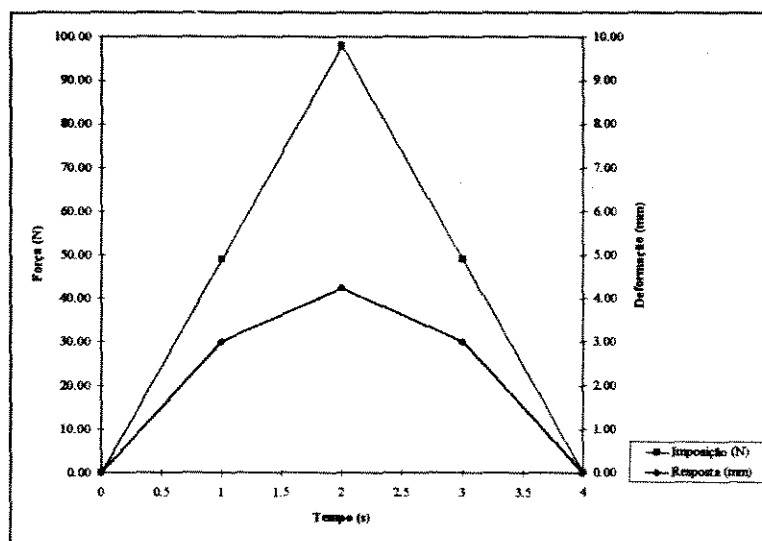


Gráfico 8.29 : Imposição x Resposta.

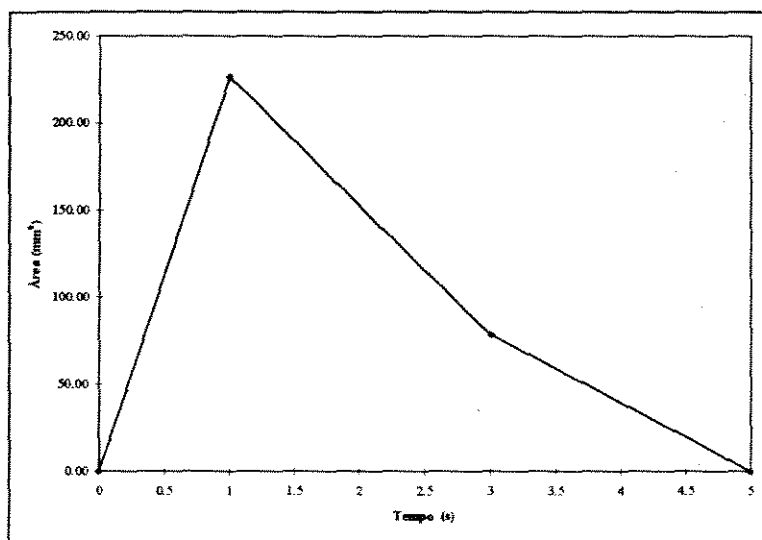


Gráfico 8.30 : Área x Tempo.

- Senoide -  $\dot{F}_{11}(t) = 98,10 \text{ N/s}$

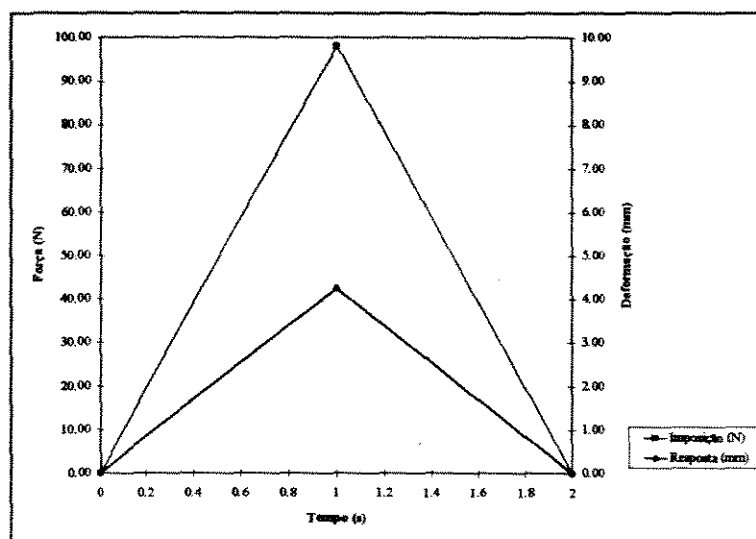


Gráfico 8.31 : Imposição x Resposta.

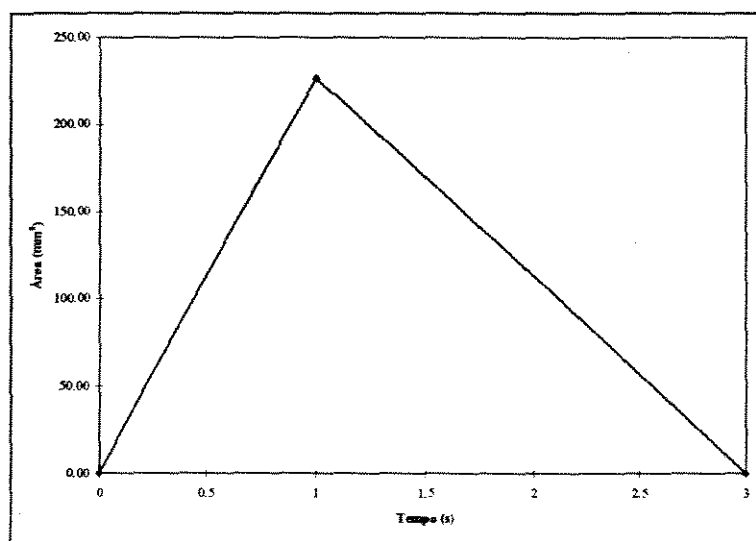


Gráfico 8.32 : Área x Tempo.

- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 19,62 \text{ N/s}$

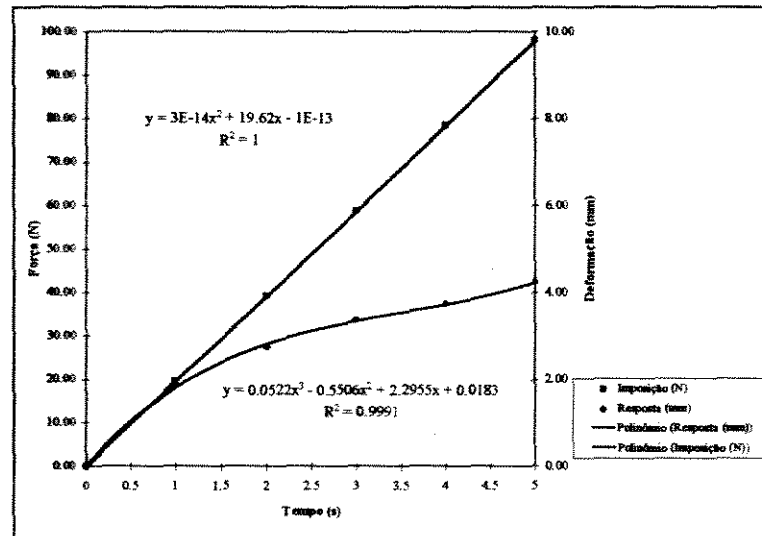


Gráfico 8.33 : Imposição x Resposta.

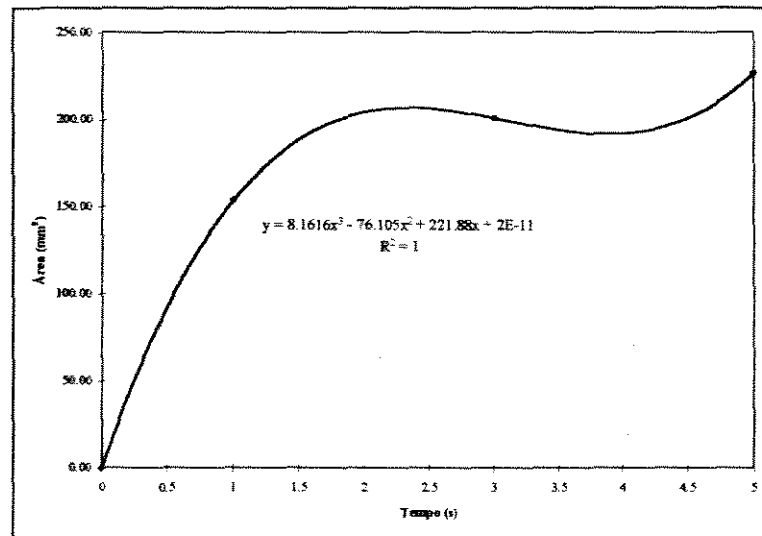
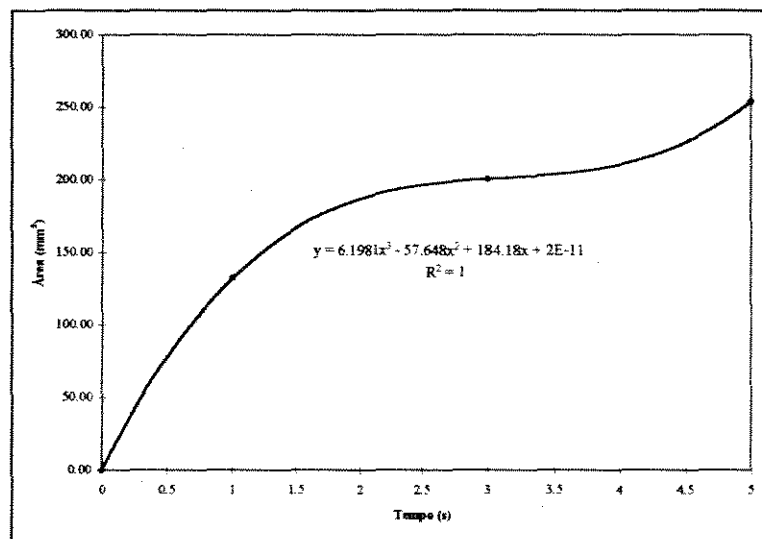
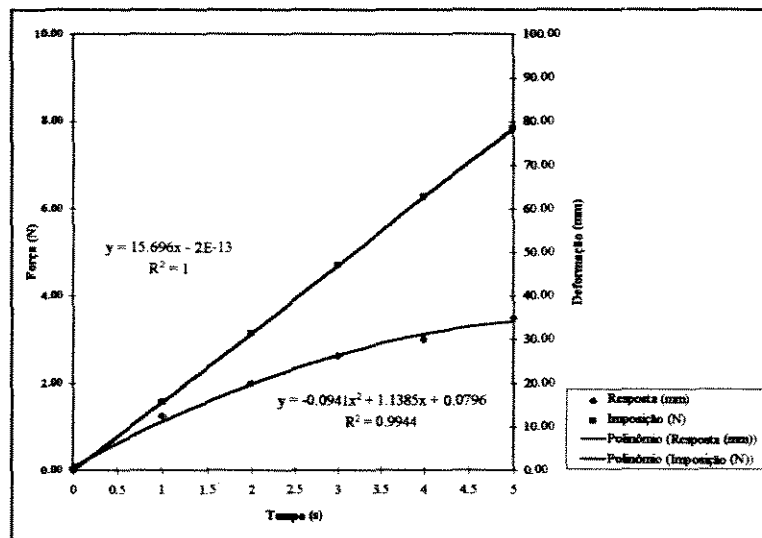


Gráfico 8.34 : Área x Tempo.

- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 15,70 \text{ N/s}$





- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 11,77 \text{ N/s}$

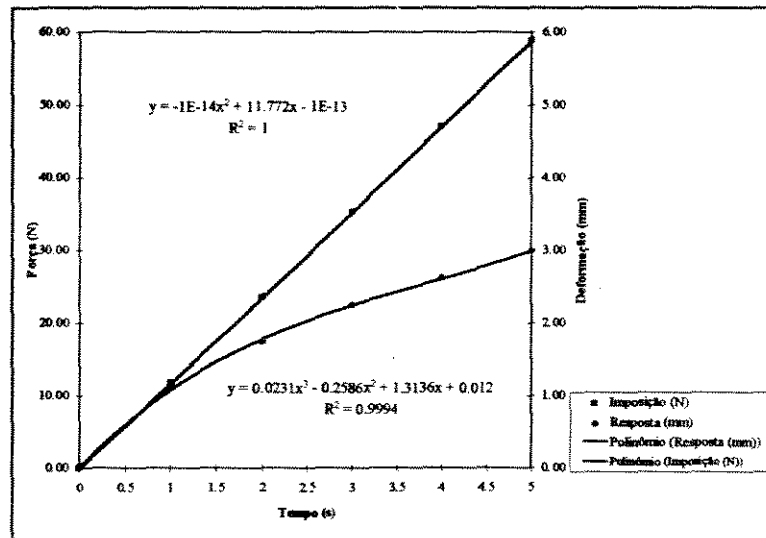


Gráfico 8.37 : Imposição x Resposta.

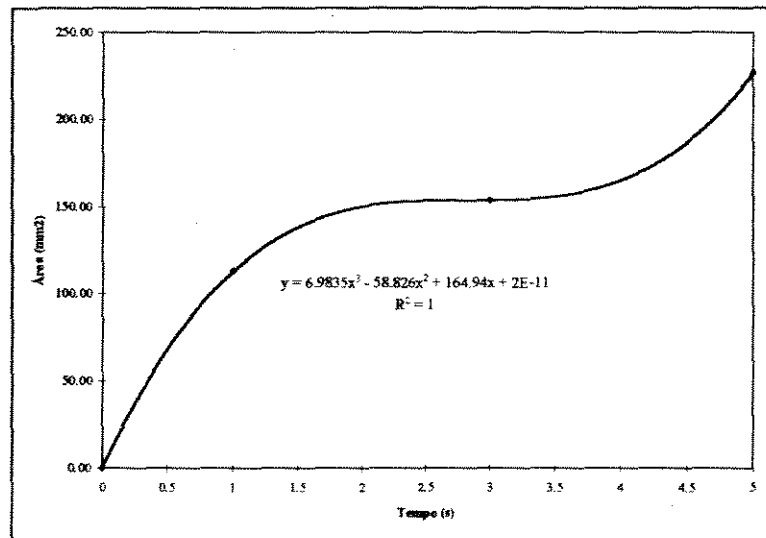


Gráfico 8.38 : Área x Tempo.

- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 7,85 \text{ N/s}$

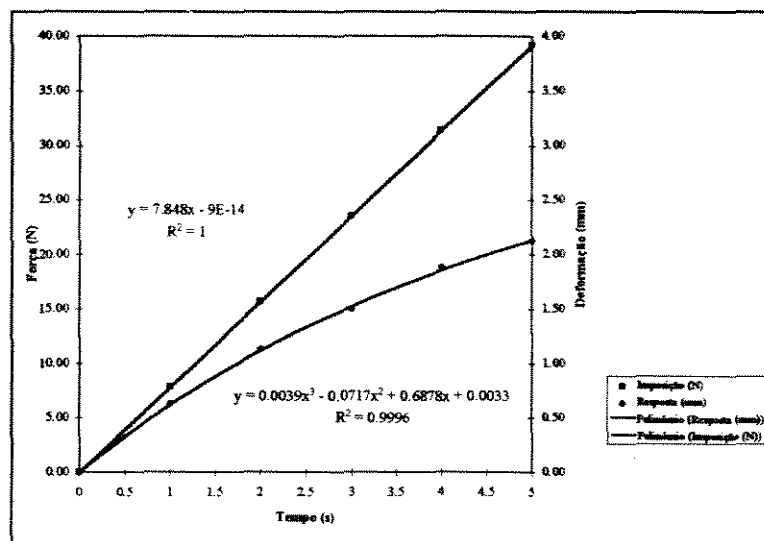


Gráfico 8.39 : Imposição x Resposta.

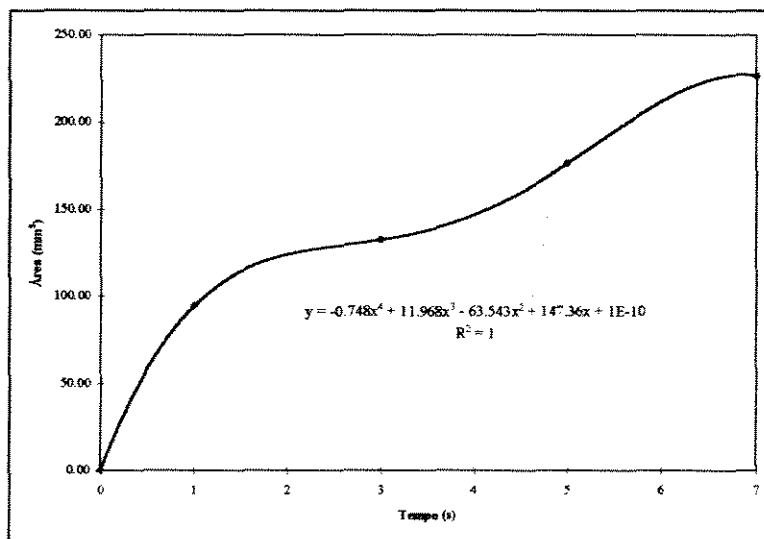


Gráfico 8.40 : Área x Tempo.

- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 3,92 \text{ N/s}$

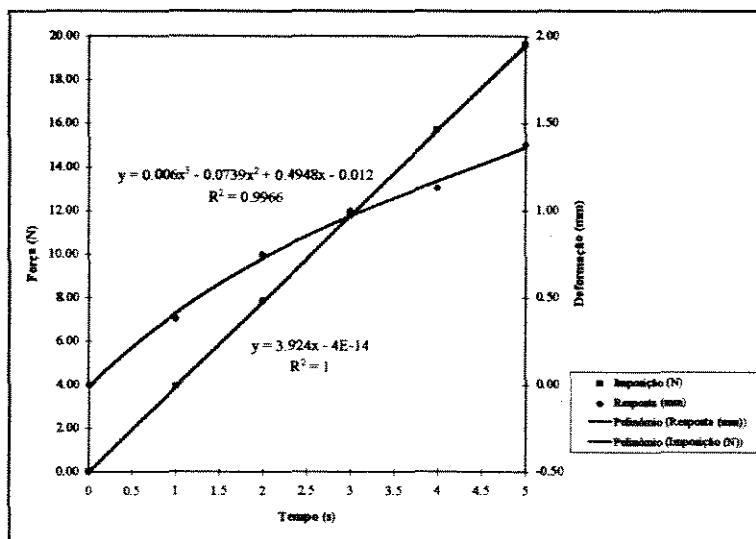


Gráfico 8.41 : Imposição x Resposta.

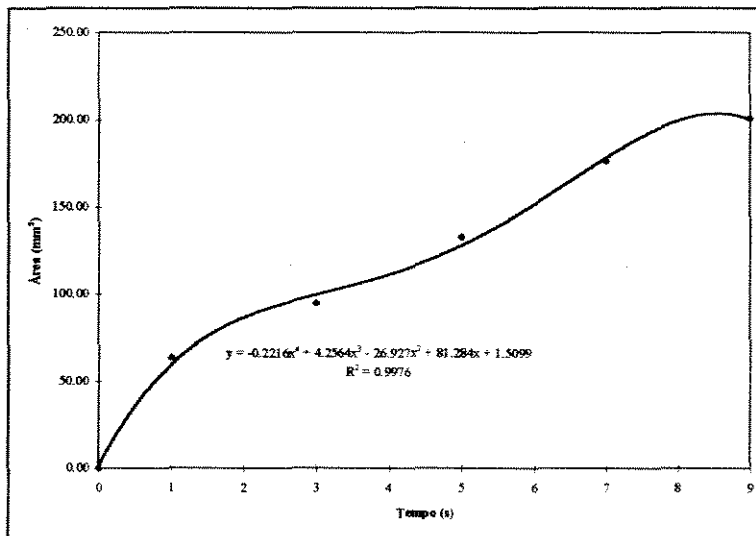


Gráfico 8.42 : Área x Tempo.

- Quadrada -  $\dot{F}_{11}(t) = 159,96 \text{ N/s}$

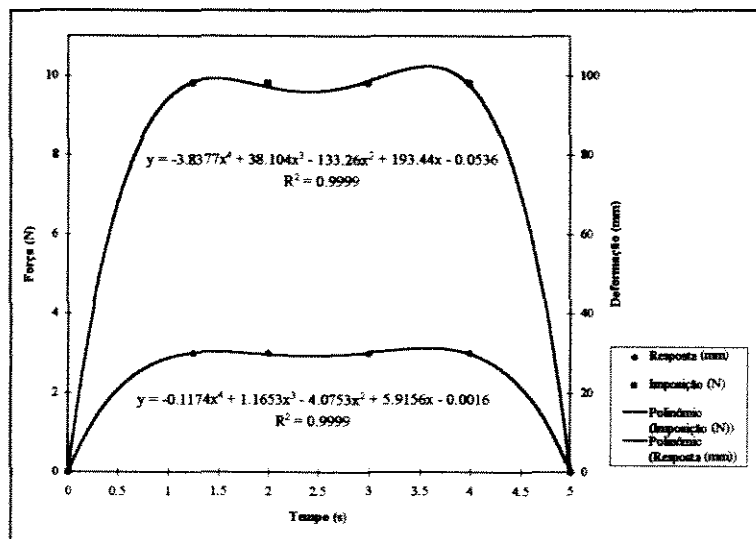


Gráfico 8.43 : Imposição x Resposta.

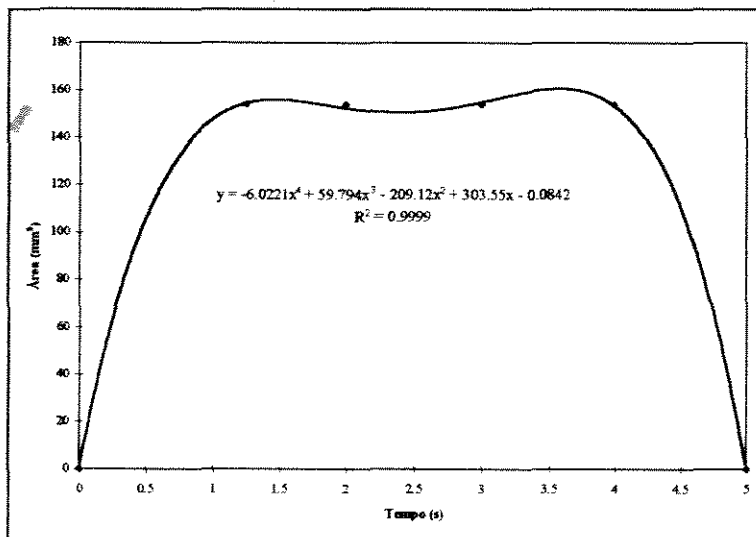


Gráfico 8.44 : Área x Tempo.

### B.2.2) Deformação controlada - $U_{11}(t)$

- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,28 \text{ mm/s}$

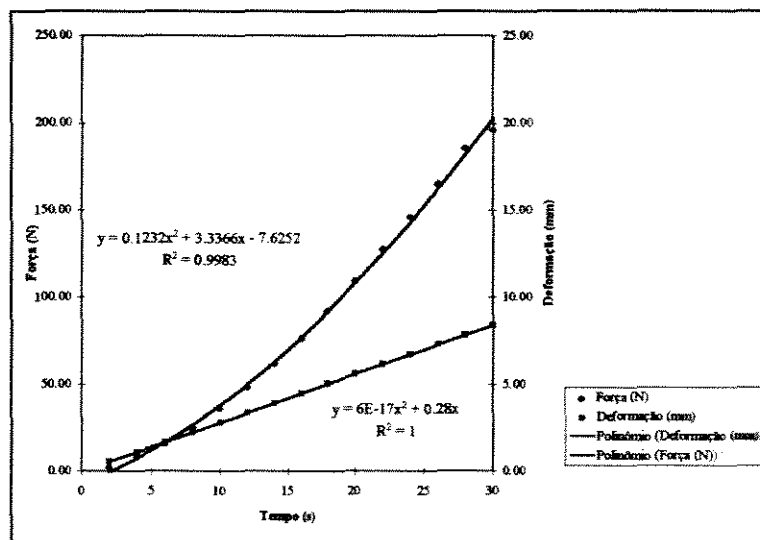


Gráfico 8.45 : Imposição x Resposta.

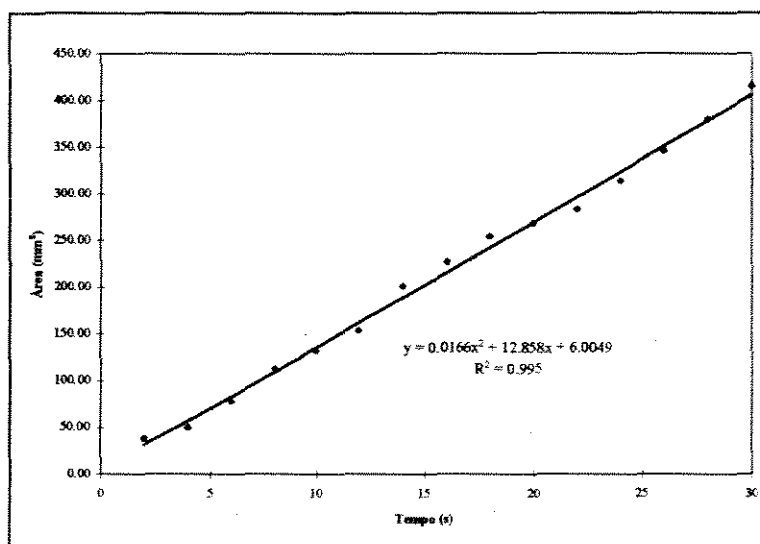


Gráfico 8.46 : Área x Tempo.

- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,33 \text{ mm/s}$

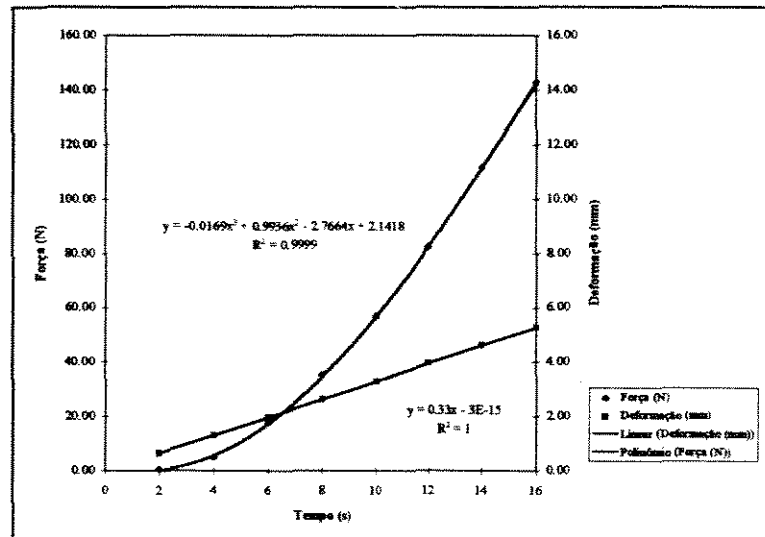


Gráfico 8.47 : Imposição x Resposta.

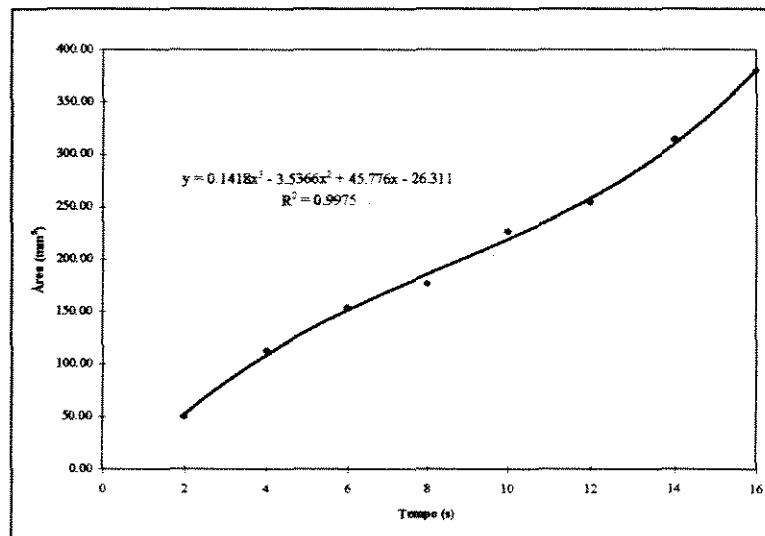


Gráfico 8.48 : Área x Tempo.

- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,84 \text{ mm/s}$

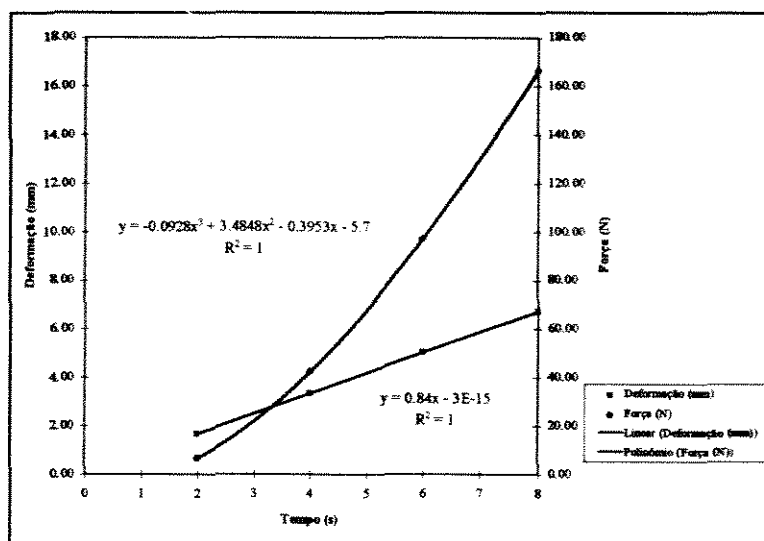


Gráfico 8.49 : Imposição x Resposta.

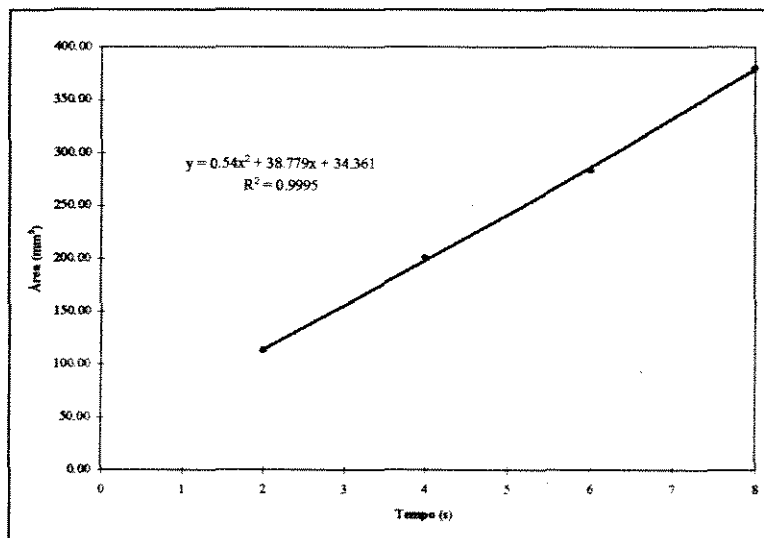


Gráfico 8.50 : Área x Tempo.

- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 1,23 \text{ mm/s}$

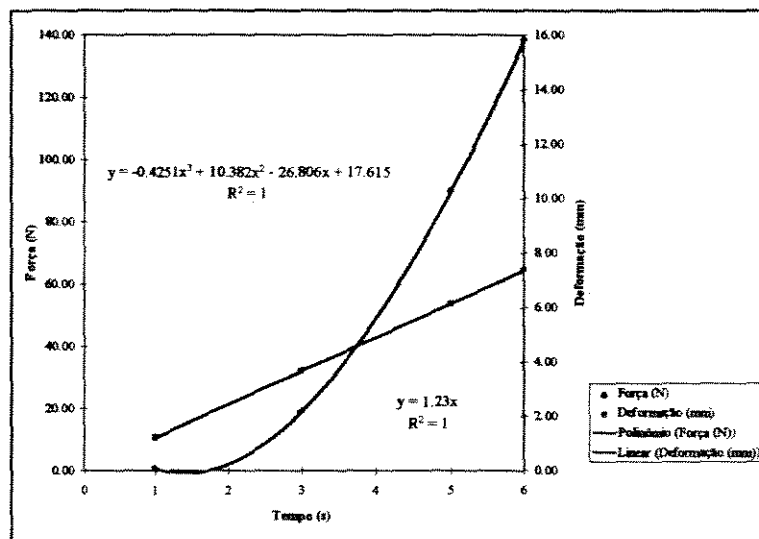


Gráfico 8.51 : Imposição x Resposta.

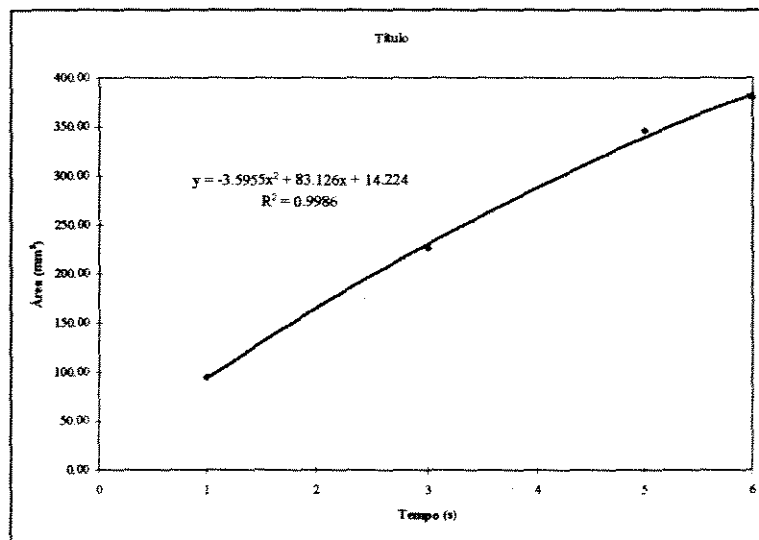


Gráfico 8.52 : Área x Tempo.



- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 1,59 \text{ mm/s}$

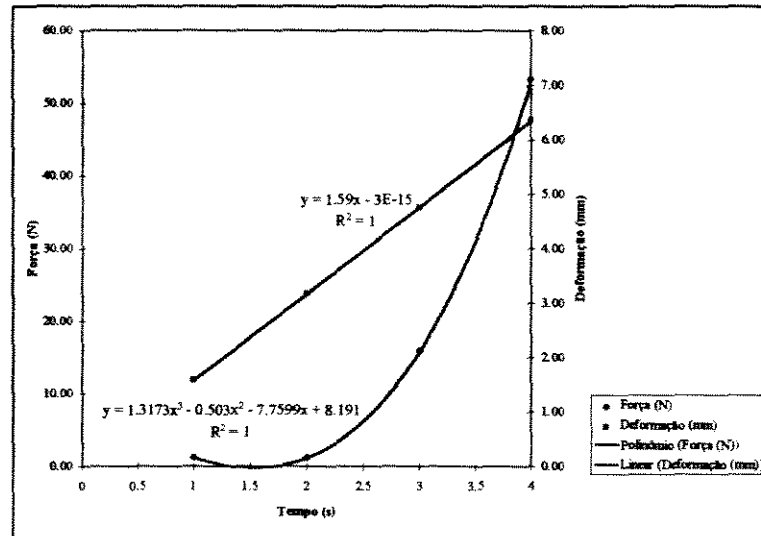


Gráfico 8.53 : Imposição x Resposta.

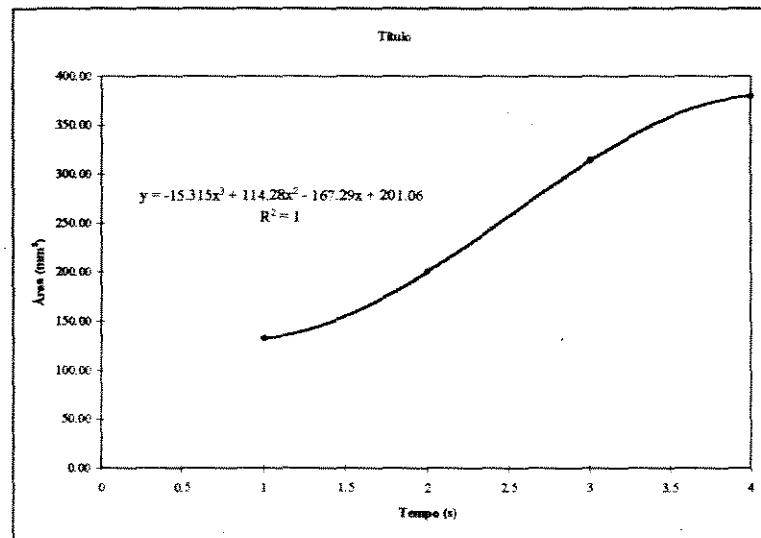


Gráfico 8.54 : Área x Tempo.

- Senoide -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,8 \text{ mm/s}$

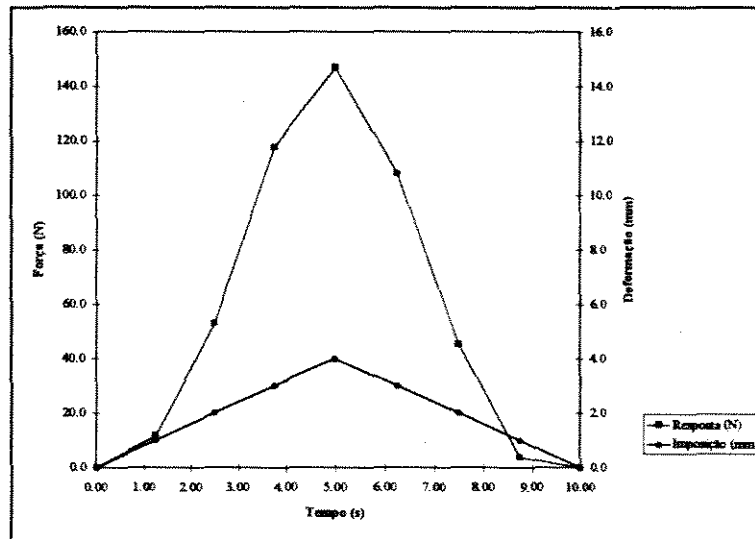


Gráfico 8.55 : Imposição x Resposta.

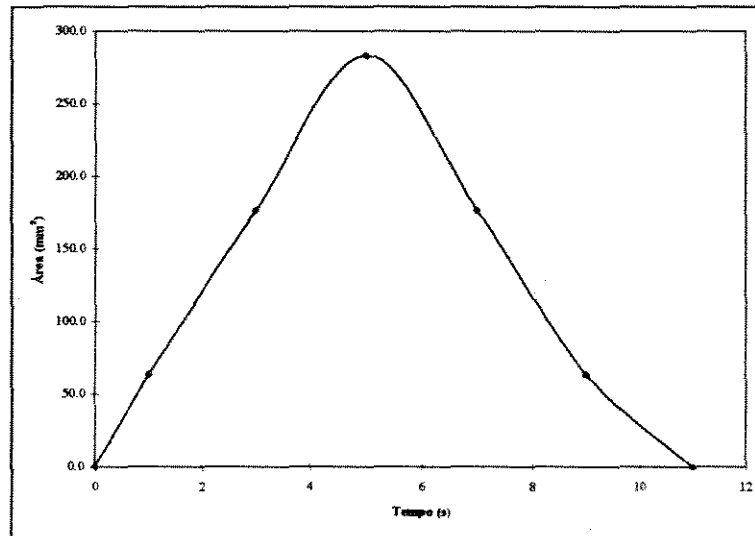


Gráfico 8.56 : Área x Tempo.

- Senoide -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,67 \text{ mm/s}$

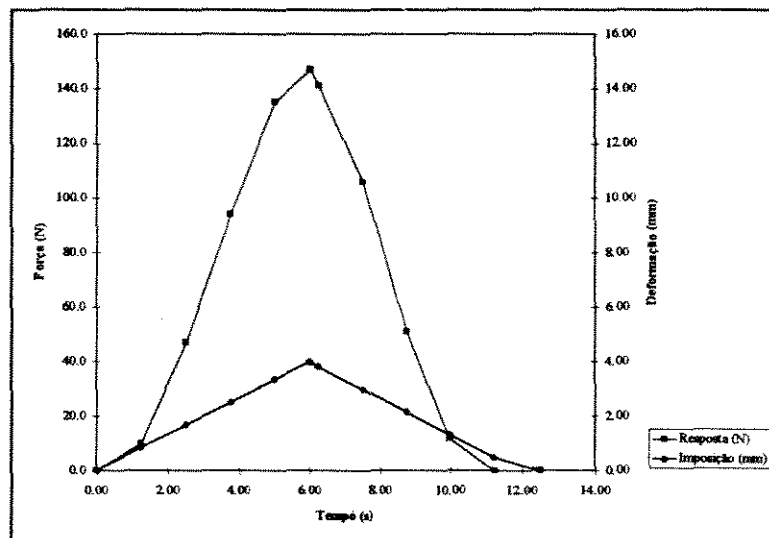


Gráfico 8.57 : Imposição x Resposta.

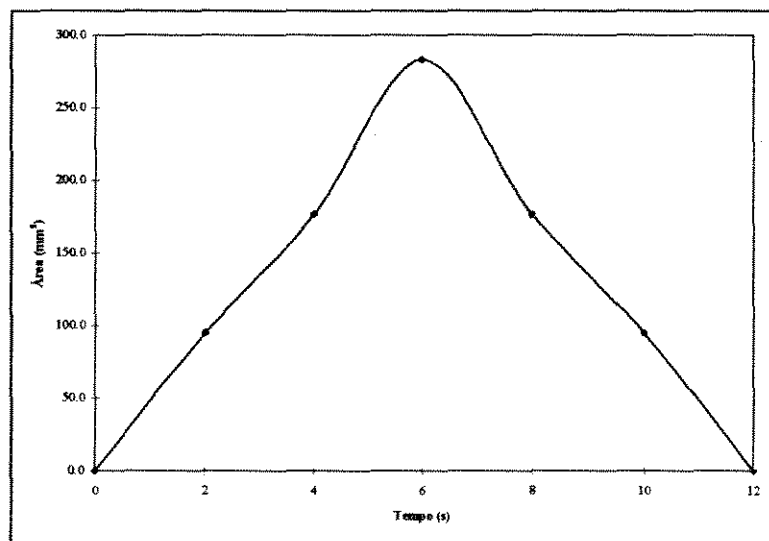


Gráfico 8.58 : Área x Tempo.

- Senoide -  $\dot{U}_1(t) = 0,57 \text{ mm/s}$

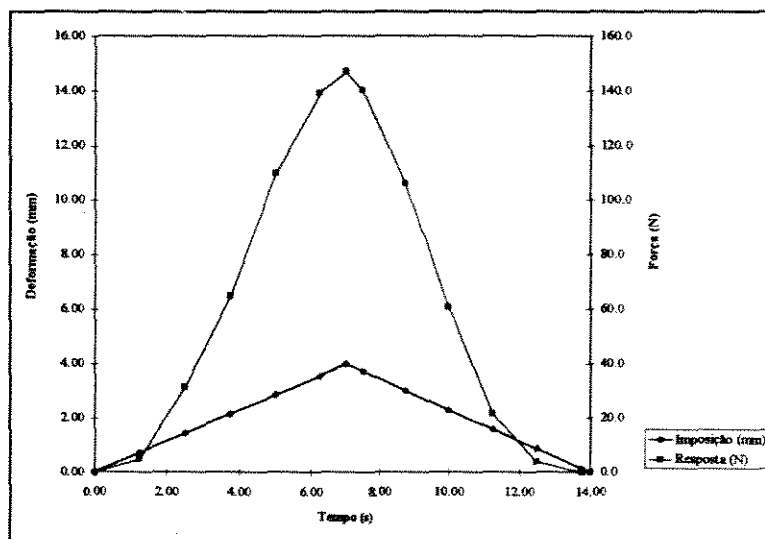


Gráfico 8.59 : Imposição x Resposta.

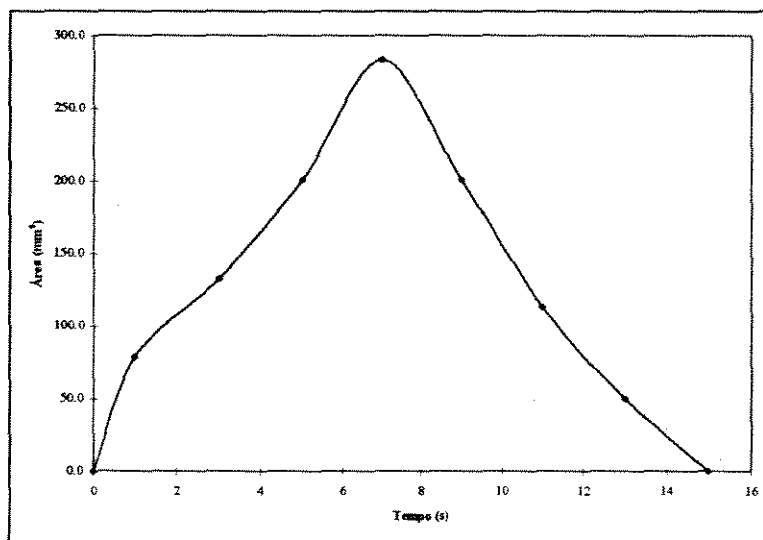


Gráfico 8.60 : Área x Tempo.

- Senoide -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,50 \text{ mm/s}$

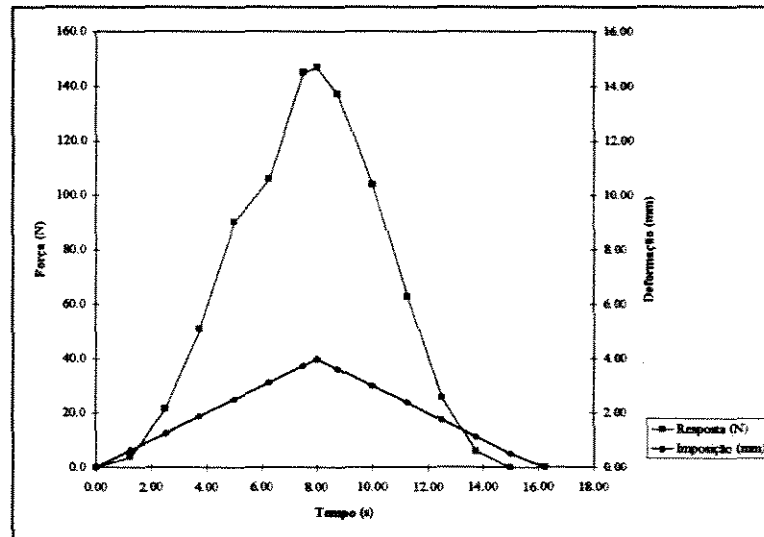


Gráfico 8.61 : Imposição x Resposta.

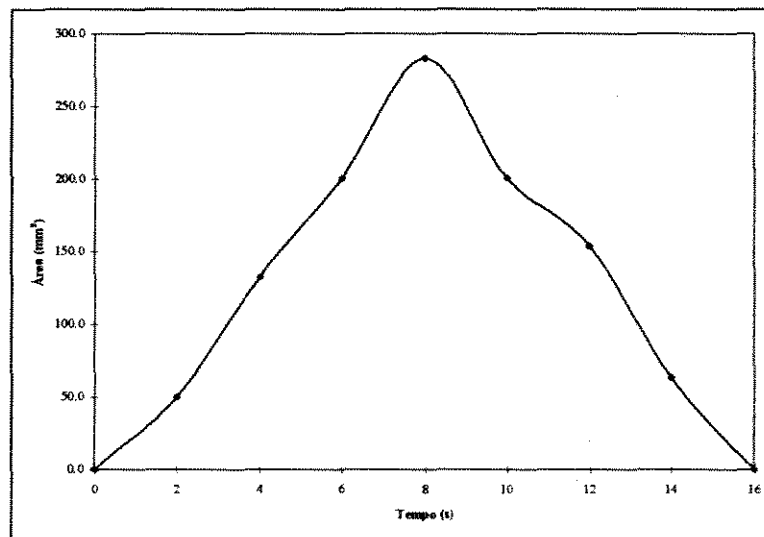


Gráfico 8.62 : Área x Tempo.

- Senoide -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,44 \text{ mm/s}$

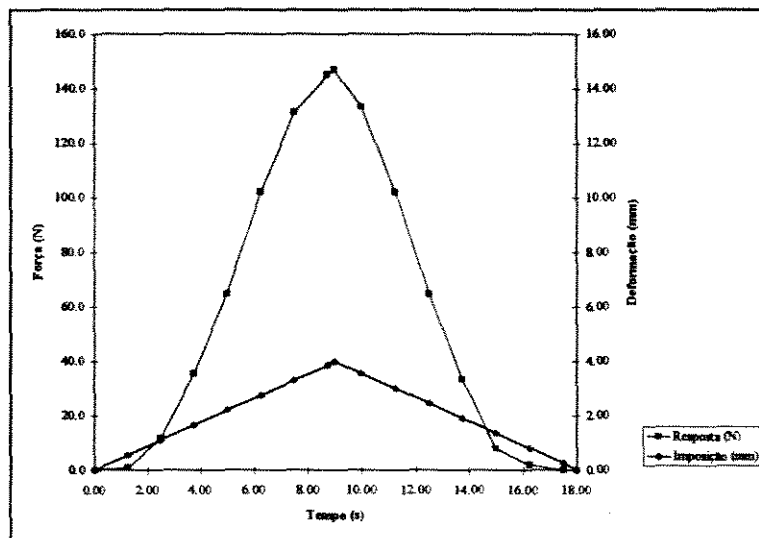


Gráfico 8.63 : Imposição x Resposta.

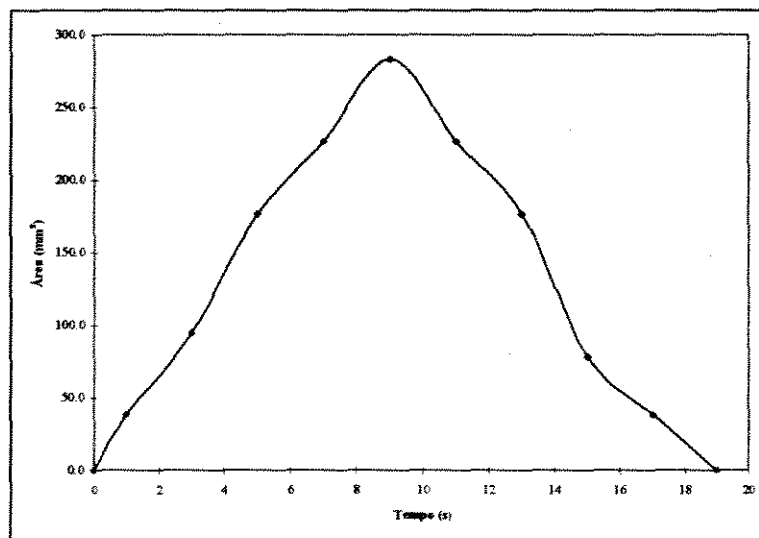


Gráfico 8.64 : Área x Tempo.

- Quadrada -  $\dot{U}_{11}(t) = 10 \text{ mm/s}$

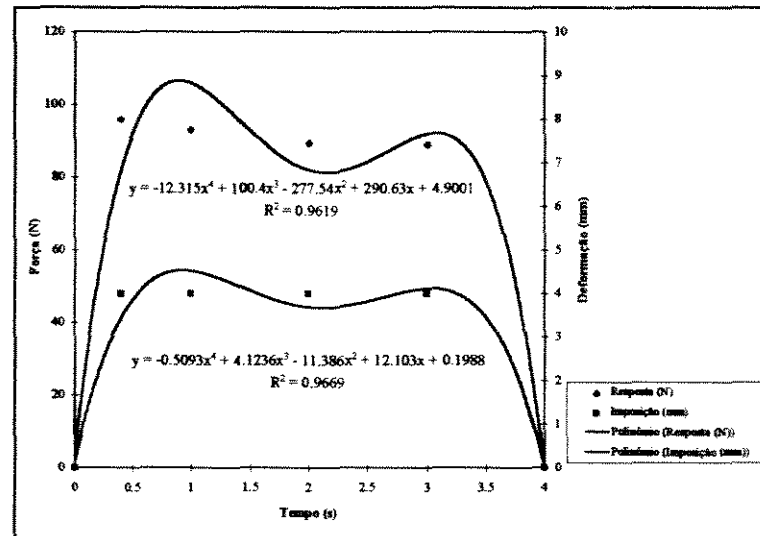


Gráfico 8.65 : Imposição x Resposta.

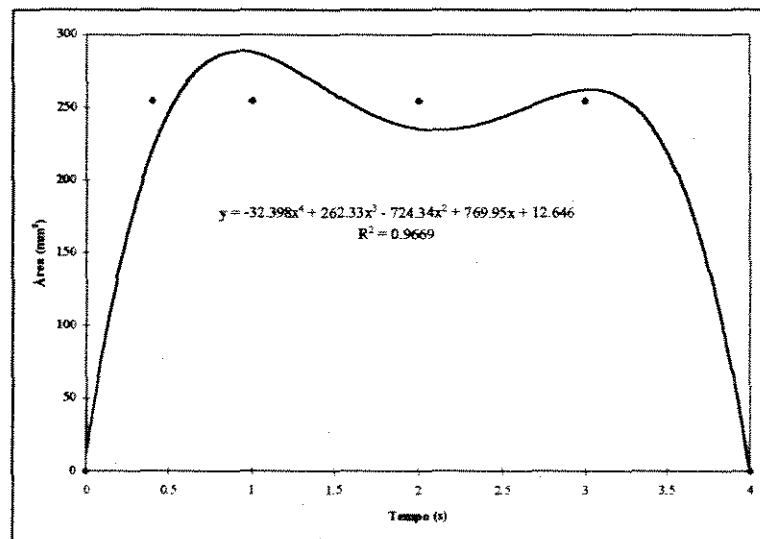


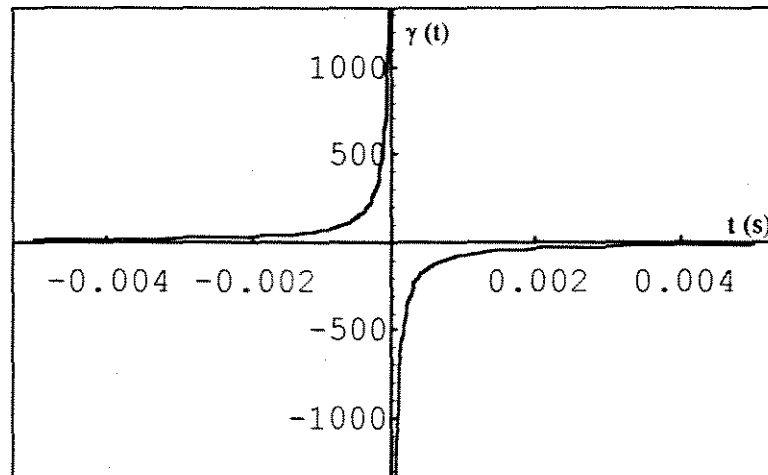
Gráfico 8.66 : Área x Tempo.

### C) Gráficos das funções $\gamma(t)$

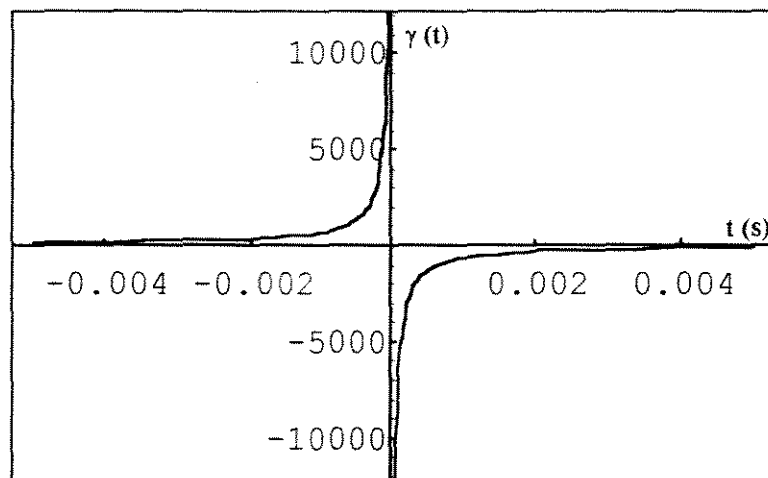
#### C.1) Ensaios com Laranja

##### C.1.1) Força controlada - $F_{11}(t)$

- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 4,91 \text{ N/s}$

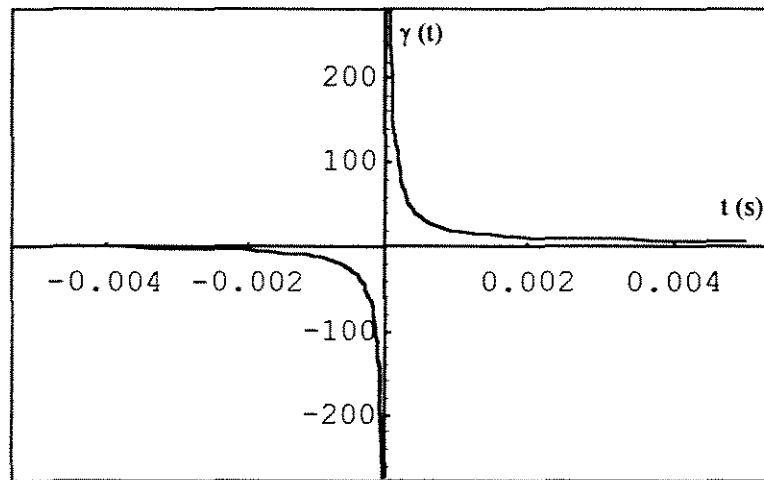


- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 3,92 \text{ N/s}$

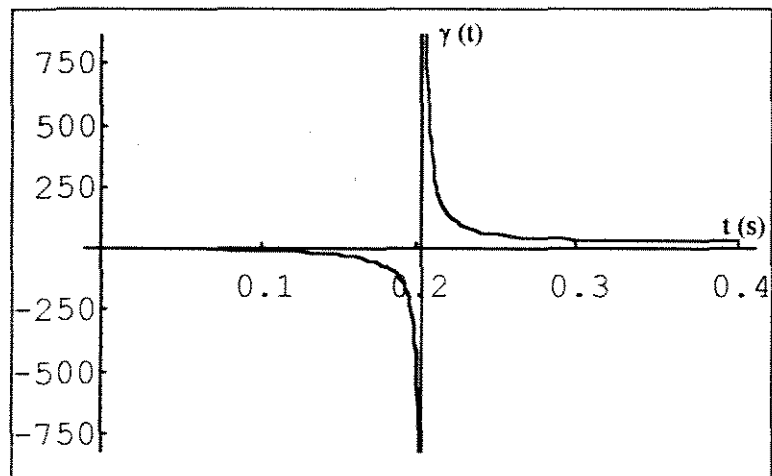




- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 2,94 \text{ N/s}$

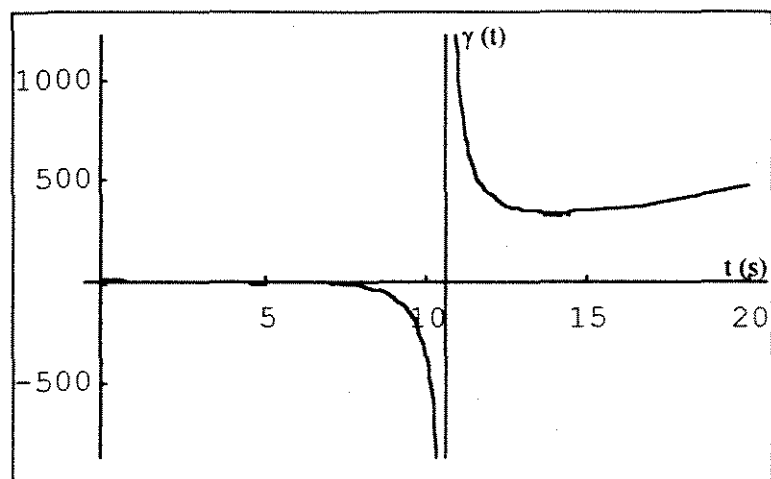


- Senoide -  $\dot{F}_{11}(t) = 9,81 \text{ N/s}$

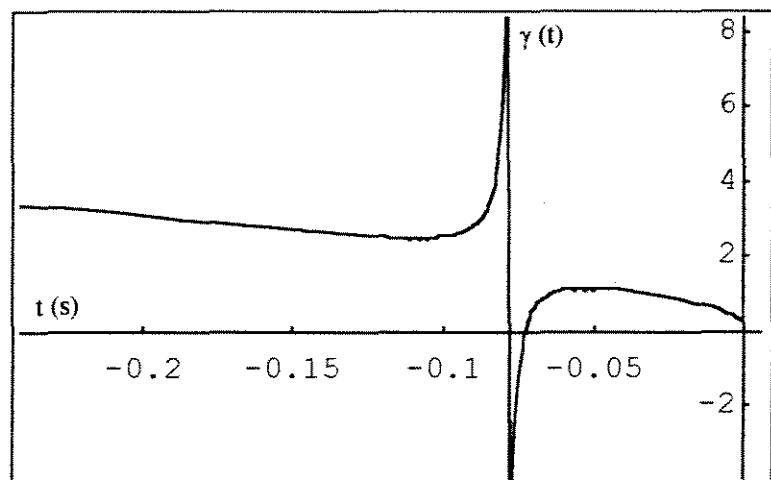


### C.1.2) Deformação controlada - $U_{11}(t)$

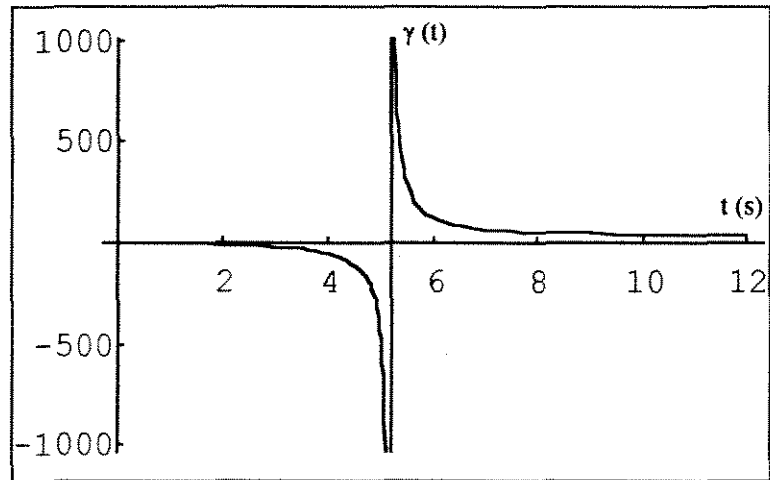
- Quadrada -  $\dot{U}_{11}(t) = 5,0 \text{ mm/s}$



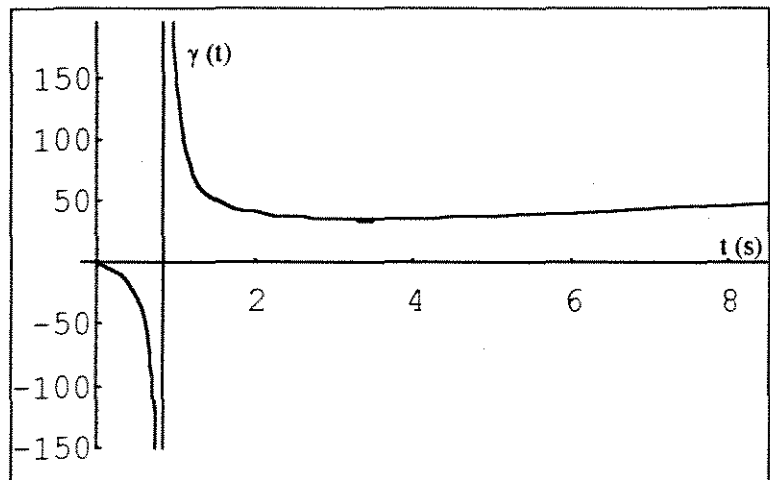
- Senoide -  $\dot{U}_{11}(t) = 1,6 \text{ mm/s}$



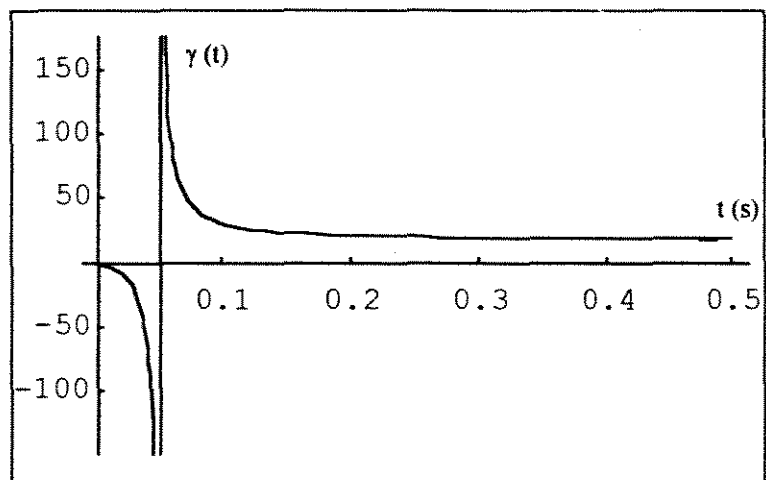
- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,28 \text{ mm/s}$



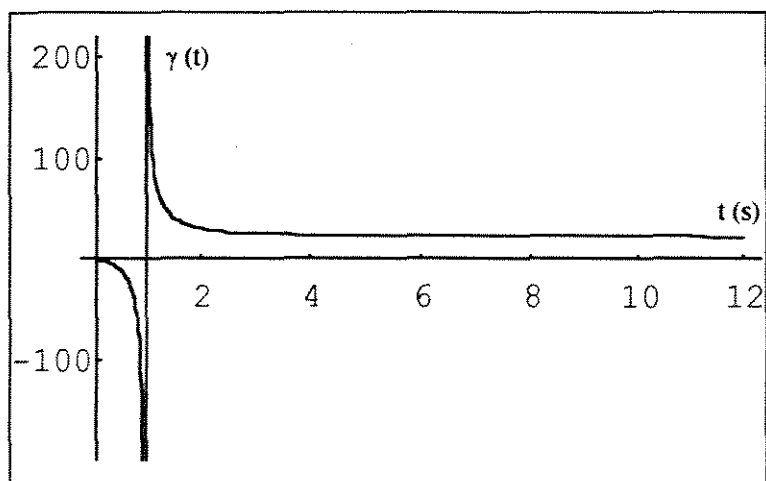
- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,33 \text{ mm/s}$



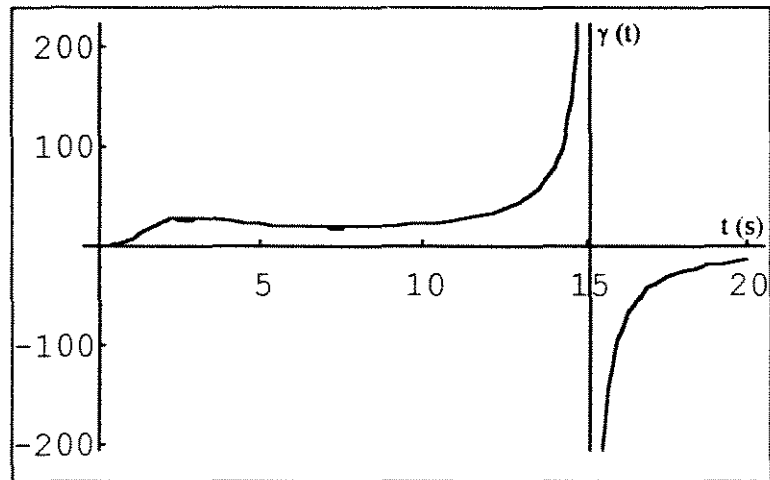
- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,84 \text{ mm/s}$



- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 1,23 \text{ mm/s}$



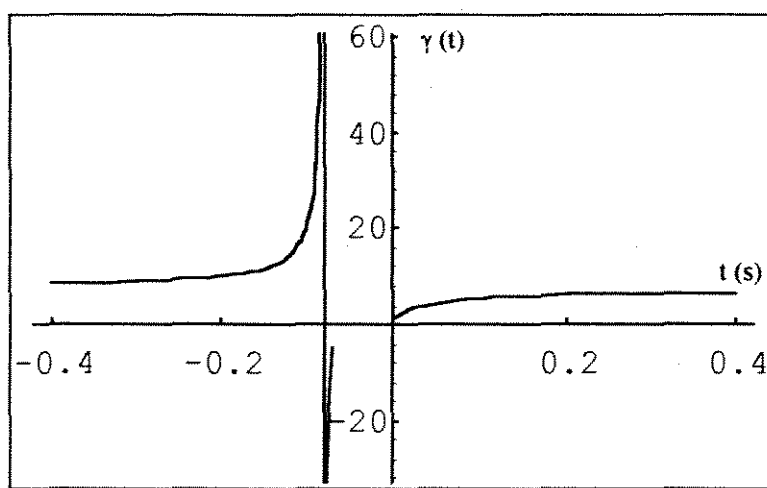
- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 1.59 \text{ mm/s}$



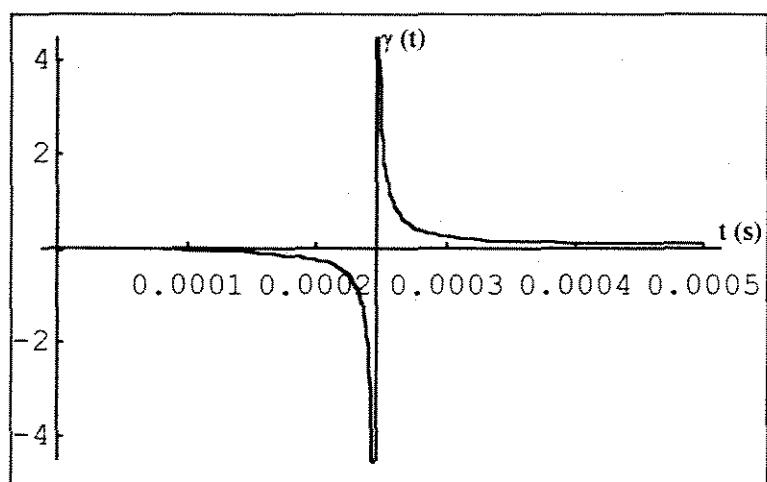
## C.2) Ensaios com Borracha

### C.2.1) Força controlada - $F_{11}(t)$

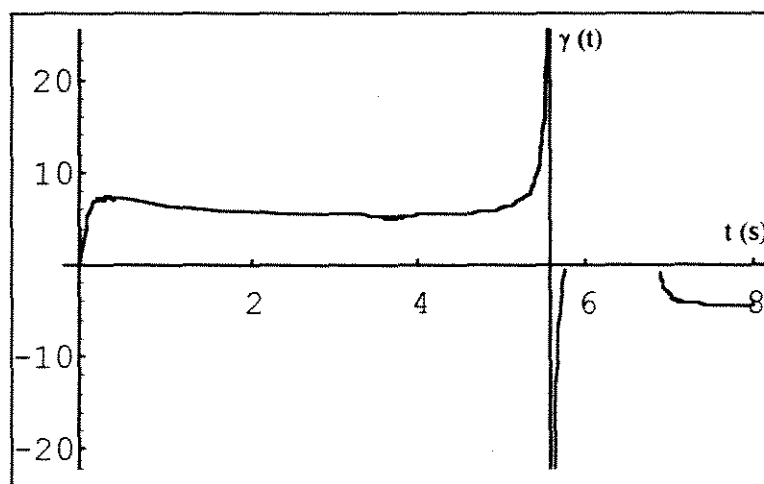
- Senoide -  $\dot{F}_{11}(t) = 19,62 \text{ N/s}$



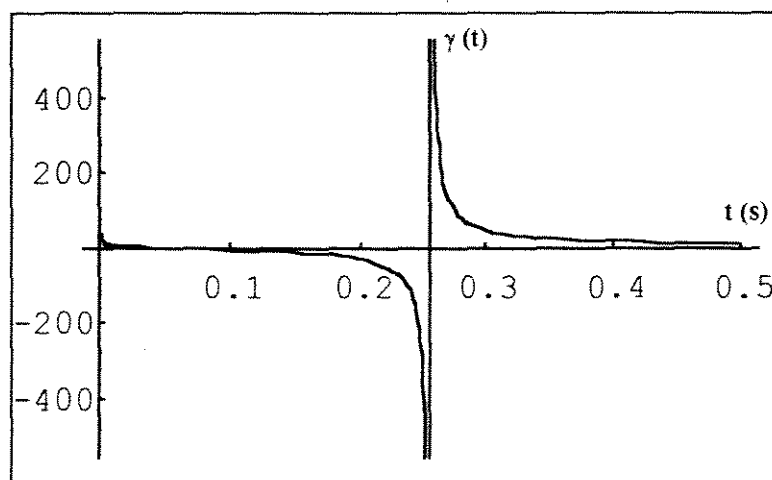
- Senoide -  $\dot{F}_{11}(t) = 24,53 \text{ N/s}$



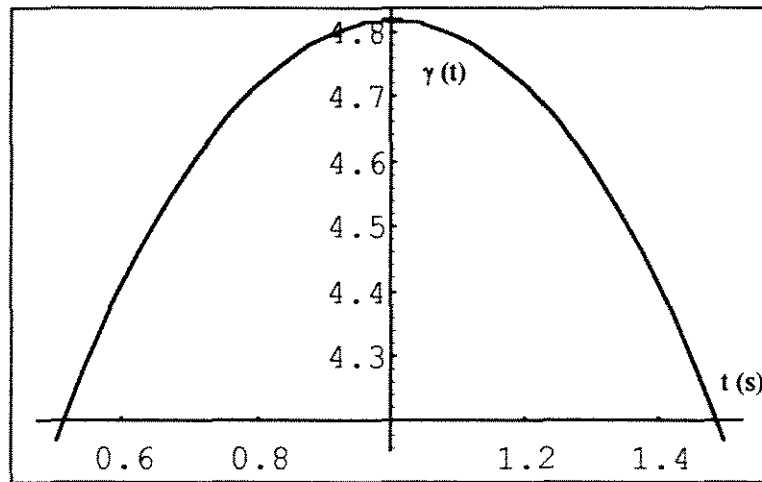
- Senoide -  $\dot{F}_{11}(t) = 32,67 \text{ N/s}$



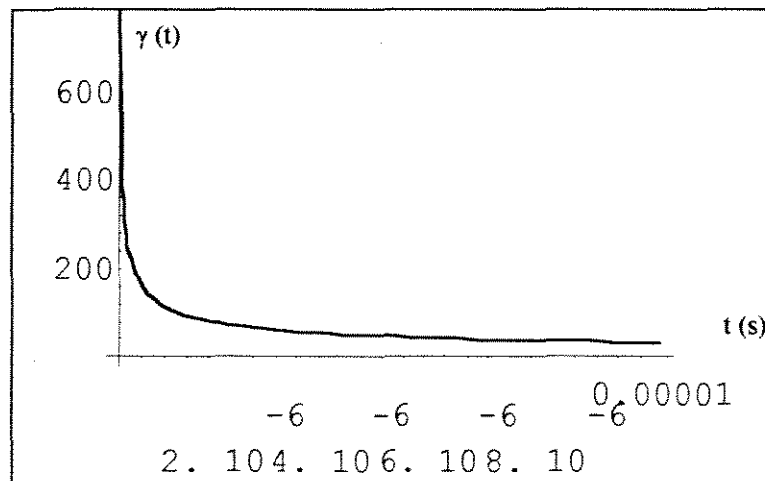
- Senoide -  $\dot{F}_{11}(t) = 49,05 \text{ N/s}$



- Senoide -  $\dot{F}_{11}(t) = 98,10 \text{ N/s}$

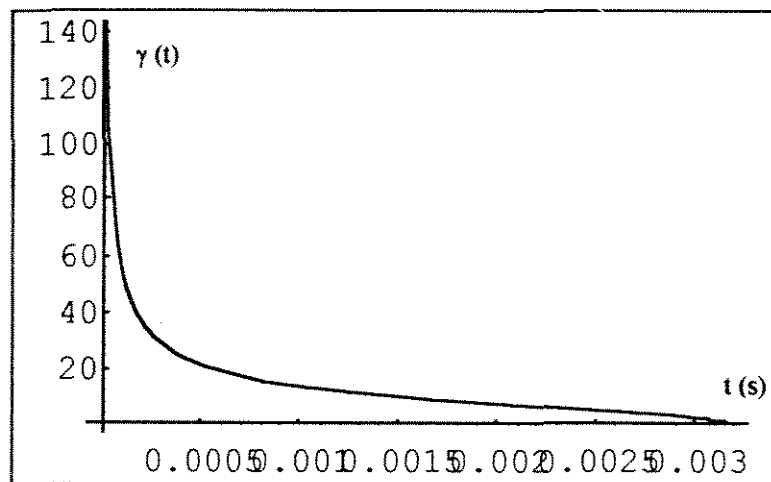


- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 19,62 \text{ N/s}$

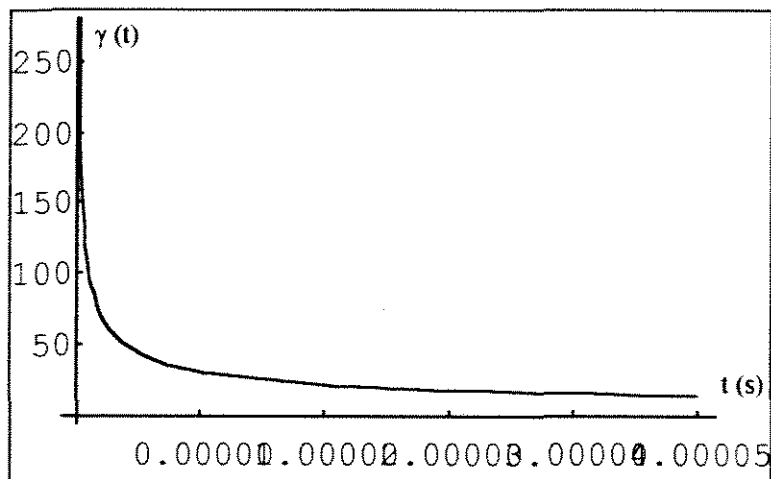




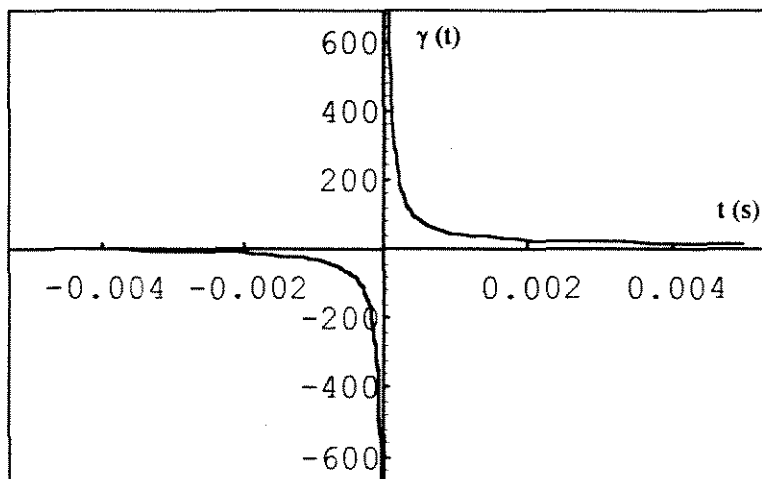
- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 15,70 \text{ N/s}$



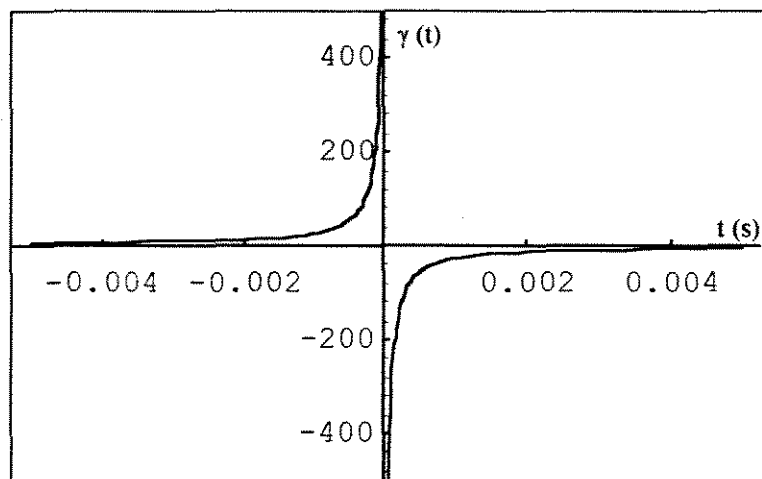
- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 11,77 \text{ N/s}$



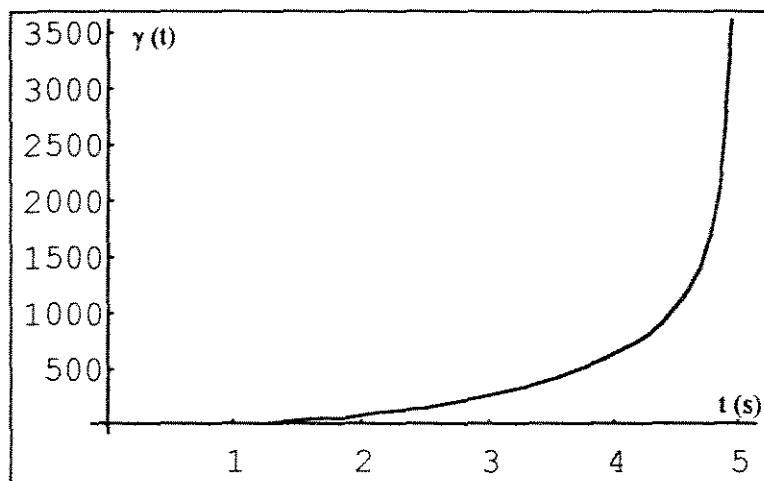
- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 7,85 \text{ N/s}$



- Linear -  $\dot{F}_{11}(t) = 3,92 \text{ N/s}$

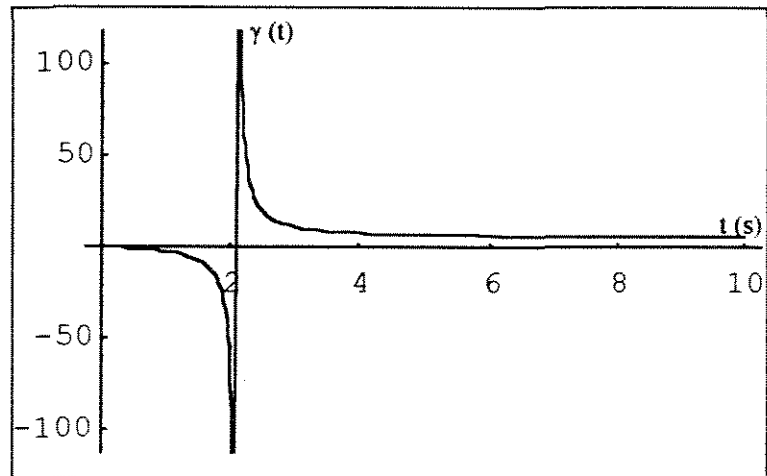


- Quadrada -  $\dot{F}_{11}(t) = 159,96 \text{ N/s}$

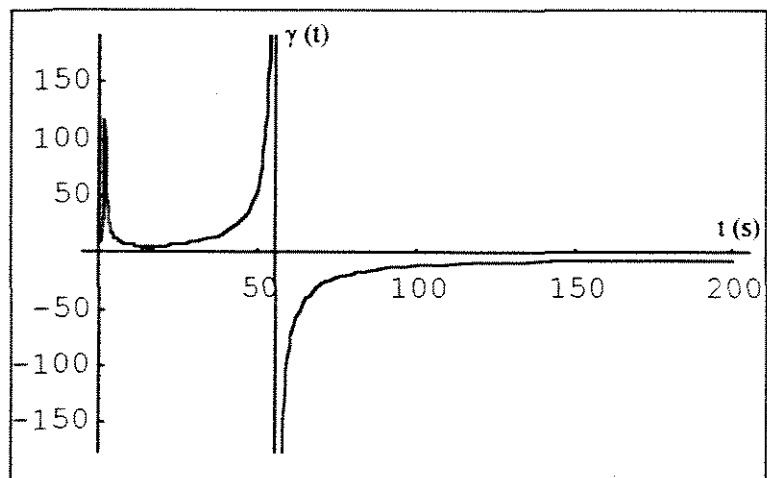


### C.2.2) Deformação controlada - $U_{11}(t)$

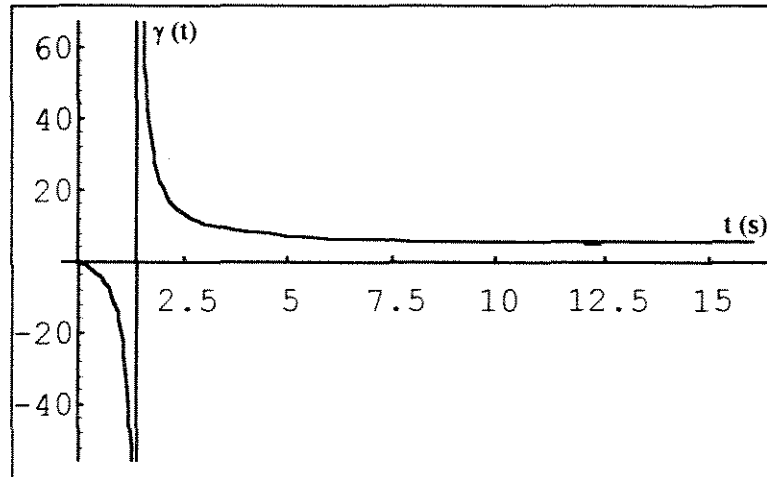
- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,28 \text{ mm/s}$



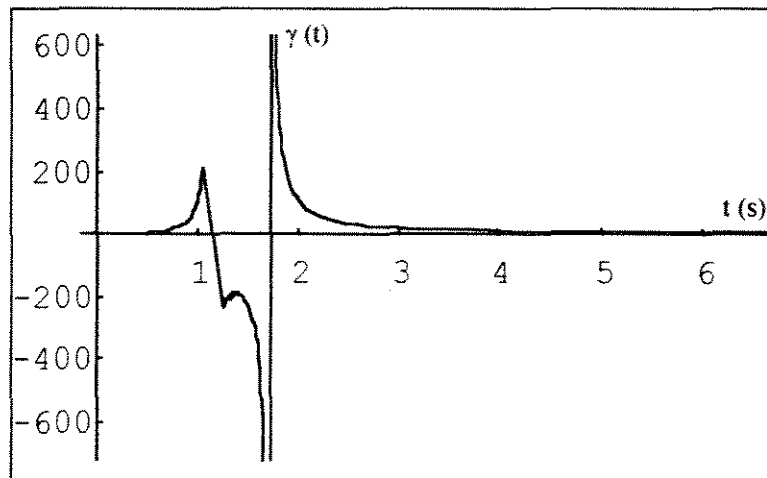
- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,33 \text{ mm/s}$



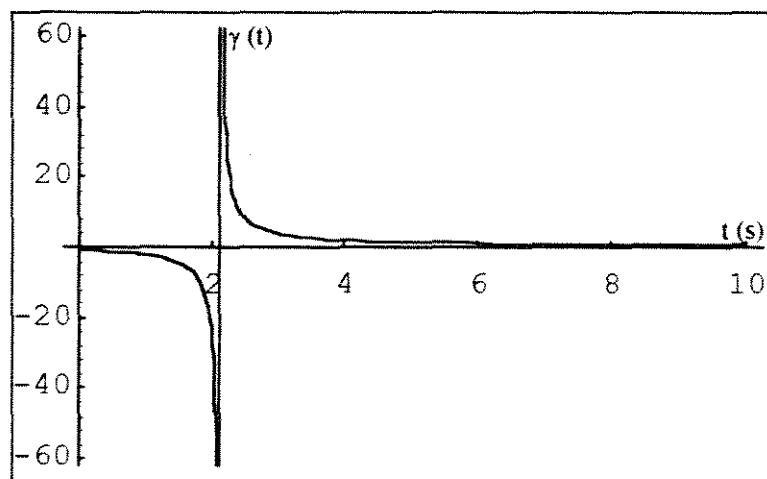
- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,84 \text{ mm/s}$



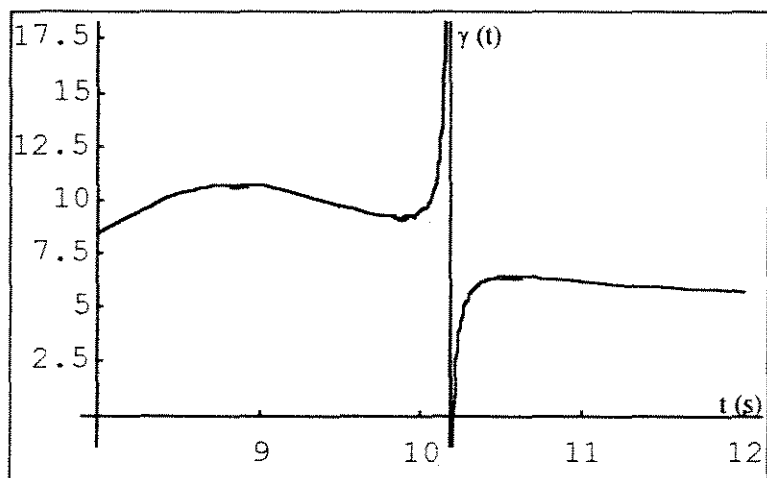
- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 1,23 \text{ mm/s}$



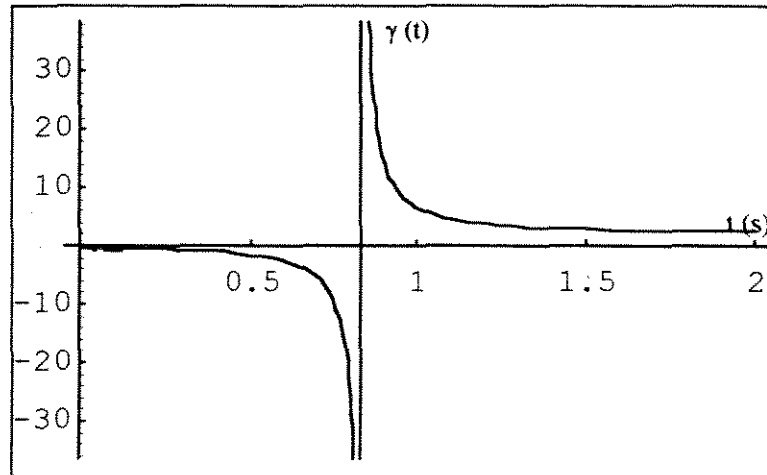
- Linear -  $\dot{U}_{11}(t) = 1,59 \text{ mm/s}$



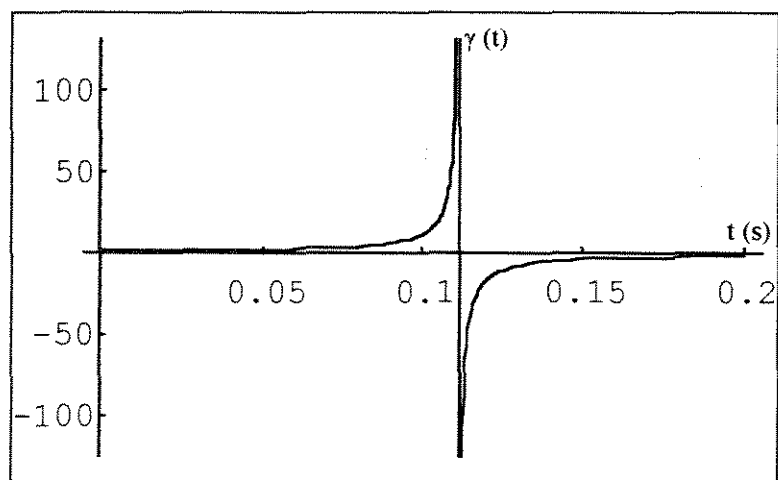
- Senoide -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,80 \text{ mm/s}$



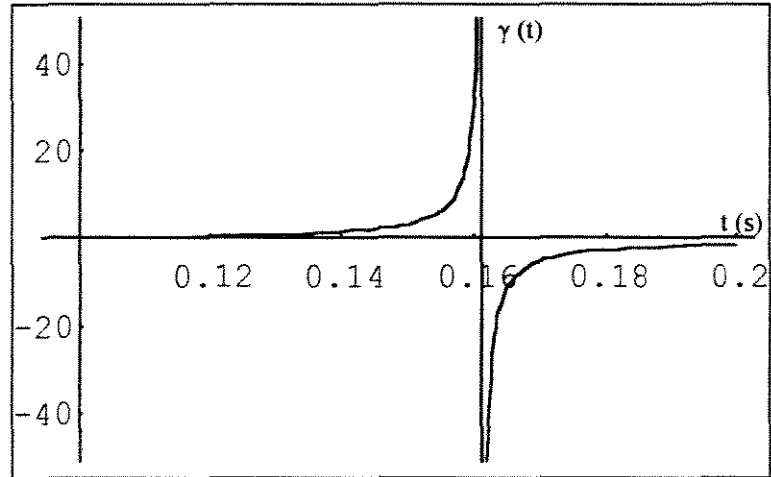
- Senoide -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,67 \text{ mm/s}$



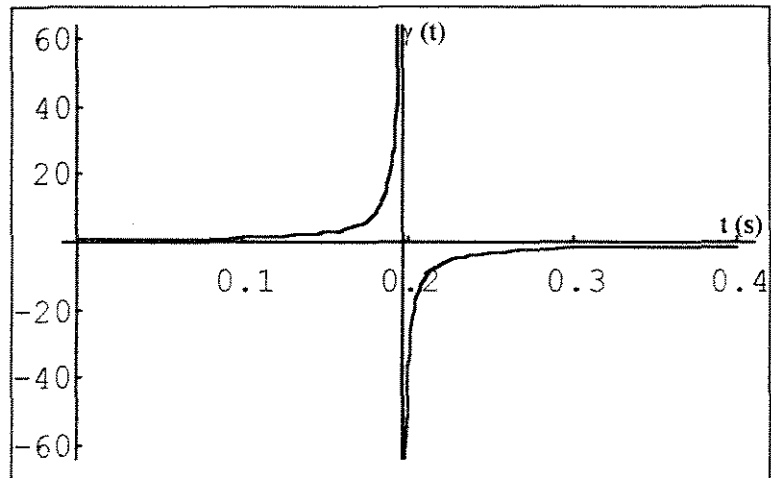
- Senoide -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,57 \text{ mm/s}$



- Senoide -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,50 \text{ mm/s}$

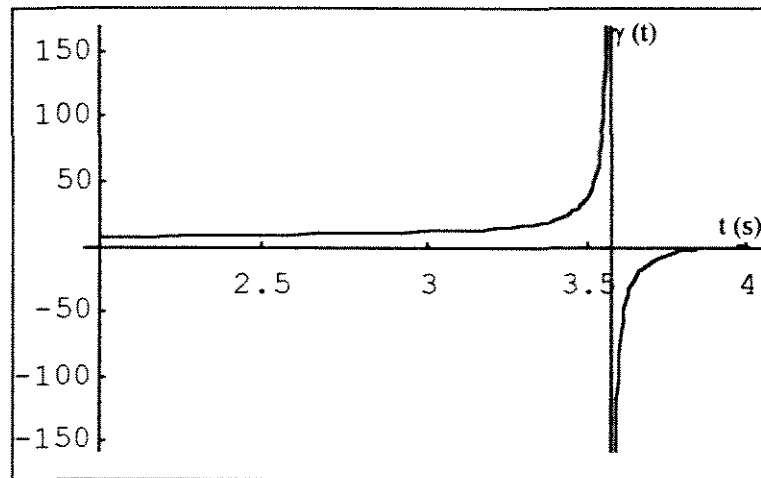


- Senoide -  $\dot{U}_{11}(t) = 0,44 \text{ mm/s}$





- Quadrada -  $\dot{U}_{11}(t) = 10,0 \text{ mm/s}$



## 9. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 9.1. Citada

- ANAZODO, U.G.N. Elastic and visco-elastic properties of agricultural products in relation to harvesting and post-harvest processes. **Agricultural mechanization in Asia, Africa and Latin America - Spring**. p.59-70, 1982.
- ASHFAQ HUSAIN, AGRAWAL, K.K., OJHA, T.P., BHOLE, N.G. Viscoelastic behavior of rough rice. **Trans. ASAE**, St. Joseph, MI, p.313-314, 1971.
- CHAPPEL, T.W., HAMANN, D.D. Poisson's ratio and Young's modulus for apple flesh under compressive loading. **Trans. ASAE**, St. Joseph, MI, v.11, n. 5, p.608-610, 1968.
- CHEN, P., STUDER, H.E., LAM, S.T. *A bulk compressibility tester for agricultural products*. St. Joseph, MI: **ASAE**, 1975, Paper n. 75-5533.
- CHRISTENSEN, R. M. *Theory of Viscoelasticity - an introduction*. New York, Academic Press, 1982, 364p.
- CHRISTENSEN, R. M. On obtaining solutions in nonlinear viscoelasticity. **Trans. ASME**, St. Joseph, MI, p.129-133, 1968.
- DAL FABBRO, Inácio M. *Failure theories for apple flesh*. E. Lansing, MI: Michigan State University, 1979. Tese (Doutorado).
- DeBAERDEMAEKER, J.G. *Experimental and numerical techniques related to the stress analysis of apple under static load*. E. Lansing, MI: Michigan State University, 1975. Tese (Doutorado).

- FERRAZ, A.C.O. *Propriedades mecânicas do internódio da cana-de-açúcar: uma contribuição metodológica*. Campinas: UNICAMP, 1987. 98p. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia Agrícola, Universidade Estadual de Campinas, 1987.
- FINNEY, E.E. *The viscoelastic behavior of the potato, Solanum tuberosum, under quasi-static loading*. E. Lansing, MI: Michigan State University, 1963. Tese (Doutorado) - Agricultural Engineering Department, Michigan State University, 1963.
- FLÜGGE, W. *Viscoelasticity*. New York, Spring-Verlag, 1975, 194p.
- GUSTAFSON, R.J. *Continuum theory for gas-solid-liquid media*. E. Lansing, MI: Michigan State University, 1974. Tese (Doutorado) - Agricultural Engineering Department, Michigan State University, 1974.
- HAMANN, D.D. Analysis of stress during impact of fruit considered to be viscoelastic. **Trans. ASAE**, St. Joseph, MI, v.13, n. 6, p.893-899, 1970.
- HAMANN, D.D. *Some dynamic mechanical properties of apple fruits and their use in the solution of an impacting contact problem of a spherical fruit*. Blacksburg, VA: Virginia Polytechnic Institute, 1967. Tese (Doutorado) - Virginia Polytechnic Institute, 1967.
- HAMMERLE, J.R., McCLURE, W.F. *The determination of Poisson's ratio by compression tests of cylindrical specimens*. Journal of Texture Studies, 1971, 2:31-49.
- HUGHES, H., SEGERLIND, L.J. *A rapid mechanical method for determining Poisson's ratio in biological materials*. St. Joseph, MI: **ASAE**, 1972, Paper n. 71-310.
- MASE, G. E. *Theory and problems of continuum mechanics*. New York, McGRAW-HILL, 1970. 221p. il (Schaum's outline series).
- MOHSENIN, N. N. *Physical properties of plant and animal materials*. New York, Gordon and Breach Science Publishers, 1970. vol. I, 734p.
- MORROW, C.T. *Viscoelasticity in a selected agricultural product*. Pennsylvania State University, 1965. Tese (Mestrado) - Pennsylvania State University, 1965.
- MORROW, C.T., MOHSENIN, N.N. *Consideration of selected agricultural products as viscoelastic materials*. **Journal of Food Science** v.31, n.5, p.686-698, 1966.
- MORROW, C.T., MOHSENIN, N.N. *Dynamic viscoelastic characterization of solid food materials*. **Journal of Food Science** v.33, n.6, p.646-651, 1968.

- ROCHA, J.V. *Comportamento mecânico de minifardos de feno de soja perene (Neonotonia Wightii Lackey c.v. cianova)*, submetidos a ensaios de relaxação com cargas uniaxiais. Campinas: UNICAMP, 1988. 104p. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia Agrícola, Universidade Estadual de Campinas, 1988.
- ROSENFELD, D., SHMULEVICH, J., ROSENHOUSE, G. Three-dimensional simulation of the acoustic response of fruit for firmness sorting. **Trans. ASAE**, St. Joseph, MI, v.35, n. 4, p.1267-1274, 1992.
- SELBY, S.M. *Standard mathematical tables*. Cleveland - Ohio, CRC Press. 1974
- SHERIF, S.M., SEGERLIND, L.J., FRAME, T.S. *An equation for the modulus of elasticity of radially compressed cylinder*. **Trans. ASAE**.
- SNOBAR, B.A. *Engineering parameters related to the hardness of carrots*. E. Lansing, MI: Michigan State University, 1973. Tese (Doutorado) - Agricultural Engineering Department, Michigan State University, 1973.
- TIMOSHENKO, S.P. *Resistência dos Materiais*. Vol. 1, Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1975.
- TIMOSHENKO, S.P., GOODIER, J.N. *Teoria da elasticidade*. 3.ed., Rio de Janeiro, Editora Guanabara Dois, c1970, 1980. 543p.il.
- WANG, J.K., CHANG, H.S. *Mechanical properties of papaya and their dependence on maturity*. St. Joseph, MI: **ASAE**, 1970, Paper n. 69-389.
- YANG, W.H. The contact problem for viscoelastic bodies. **Trans. ASME**, St. Joseph, MI, p.395-401, 1966.
- ZOERB G.C. *Mechanical and rheological properties of grain*. E. Lansing, MI: Michigan State University, 1958. Tese (Doutorado) - Agricultural Engineering Department, Michigan State University, 1958.

## 9.2. Consultada

ASAE STANDARDS: ASAE S368.1: Compression test food materials of convex shape. **ASAE STANDARDS** 1989, St. Joseph, MI, **36**: 368-371, 1989.

BOWDEN, F. P., TAYLOR, D. *The friction and lubrication of solids*. London, Oxford University Press, 1954. Apud MOHSENIN, N. N. *Physical properties of plant and animal materials*. New York, Gordon and Breach Science Publishers, 1970. vol. I, p.402.

BURKNER, P. F., KINCH, D. M. Force-deformation ratio as an index of papaya maturation. **Trans. ASAE**, St. Joseph, MI, **11 (3)**: 437-40, 1968.

FRIDLEY, R.B., BRADLEY, R.A. RUMSEY, L.W., ADRIAN, P.A. Some aspects of elastic behavior of selected fruits. **Trans. ASAE**, St. Joseph, MI, v.11, n. 1, p.46-49, 1968.

LUBKIN, J. L. Contact problems. In: FLUGGE, W., ed. *Handbook of engineering mechanics*. New York, McGRAW-HILL, 1962. cap. 42.

MARTINS, M. P. *Comportamento Mecânico da Laranja Péra*. Campinas :UNICAMP, 1993. 100p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Agrícola) - Faculdade de Engenharia Agrícola, Universidade Estadual de Campinas, 1993.

NAHIR, D.; RONEN, B.; PRIGOJIN, I. *Shelf-life prediction of citrus fruit*. St. Joseph, MI, **ASAE**, 1989. 10p.il (ASAE technical paper n. 89-6024).

PELEG, K. *Produce Handling, packaging and distribution*. Technion City, Haifa, Israel, Israel Institute of Technology, 1985. 18 chapters, 625p.

PELEG, M. Determination of fresh papaya's texture by prepenetration tests. **Journal of food science**. **39**: 156-159, 1974.

VÉLEZ PASOS, C.A. *Análise do comportamento mecânico de laranjas à granel mediante modelo de elementos finitos*. Campinas: UNICAMP, 1987. 89p. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia Agrícola, Universidade Estadual de Campinas, 1987.

## 10. ABSTRACT

Viscoelastic properties of fruits and vegetables is considered important to desing equipment for agricultural operations as well as for processing, packing and selection.

The work presents a study of contact loads applied to spherical fruits which generates non linear relations due to the geometry of the body. Oranges and rubber sphere were used for tests, controlling free rate,  $\dot{F}_{11}(t)$  and deformation rate,  $\dot{U}_{11}(t)$ . It was controlled  $F_{11}(t)$  as a linear function of time (1), as a square wave of time (2) and as sinusoidal function of time (3) and obtained answers  $U_{11}(t)$ , said deformation as function of time. Reversing the situation,  $U_{11}(t)$  was controled as the same three mentioned functions, obtaining  $F_{11}(t)$  as answer.

A technique was developed to obtain the contact area, represented as  $A(t)$ . A viscoelastic function  $\gamma(t)$  was defined from Hertz expression of contact stress. That function was observed to behave as a retangular hiperbola, strongly influenced by the rates  $\dot{F}_{11}(t)$  and  $\dot{U}_{11}(t)$ . The present loading case cannot be supported by the Elastic-Viscoelastic Correspondence Principle due the change of the boundary conditions  $B_u$  and  $B_\sigma$ .

## **11. APÊNDICE**



## Apêndice A

## Rotina para software mathematica para ajuste de curvas

```

resp={{0,0},{1,2.53},{2,4.78},{3,6.74},{4,8.50},{5,10.39},
{6,10.22},{7,9.65},{8,8.76},{9,7.18},{10,3.44}}
{{0, 0}, {1, 2.53}, {2, 4.78}, {3, 6.74}, {4, 8.5}, {5, 10.39},
{6, 10.22}, {7, 9.65}, {8, 8.76}, {9, 7.18}, {10, 3.44}}
impo={{0,0},{1,1},{2,2},{3,3},{4,4},{5,5},{6,4},{7,3},
{8,2},{9,1},{10,0}}
{{0, 0}, {1, 1}, {2, 2}, {3, 3}, {4, 4}, {5, 5}, {6, 4},
{7, 3}, {8, 2}, {9, 1}, {10, 0}}
trend=Fit[resp,{1,t^3,t^2,t},t]
-0.025035 + 2.55324 t - 0.0189103 t2 - 0.0200602 t3
trend2=Fit[impo,{1,t^3,t^2,t},t]
-0.34965 + 1.74825 t - 0.174825 t2 - 8.50421 10-19 t3
ponto=ListPlot[resp, PlotStyle -> {PointSize[0.02],
RGBColor[0, 0, 1]}, Frame -> True]
-Graphics-
ponto2=ListPlot[impo, PlotStyle -> {PointSize[0.02],
RGBColor[0, 0, 1]}, Frame -> True]
-Graphics-
ajust=Plot[trend,{t,0,10}]
-Graphics-
ajust2=Plot[trend2,{t,0,10}]
-Graphics-
Show[ajust,ajust2,ponto, ponto2]
-Graphics-
area={{0,0},{2,609.39},{4,882.4},{6,827.58},{8,419.25},{10,0}}
{{0, 0}, {2, 609.39}, {4, 882.4}, {6, 827.58}, {8, 419.25}, {10, 0}}

```

```

trend3=Fit[area,{1,t^2,t,Cos[t]},t]
51.3088 + 338.326 t - 35.1031 t^2 - 39.0156 Cos[t]
ponto3=ListPlot[area, PlotStyle -> {PointSize[0.02],
RGBColor[0, 0, 1]}, Frame -> True]
-Graphics-
ajust3=Plot[trend3,{t,0,10}]
-Graphics-
Show[ajust3, ponto3]
-Graphics-
gama=0.7523*trend*trend3^0.5*trend2^-1
(0.7523 (-0.025035 + 2.55324 t - 0.0189103 t^2 - 0.0200602 t^3 )
(51.3088 + 338.326 t - 35.1031 t^2 - 39.0156 Cos[t])^0.5) /
(-0.34965 + 1.74825 t - 0.174825 t^2 - 8.50421 10^-19 t^3 )
Simplify[%]
(0.7523 (-0.025035 + 2.55324 t - 0.0189103 t^2 - 0.0200602 t^3 )
(51.3088 + 338.326 t - 35.1031 t^2 - 39.0156 Cos[t])^0.5) /
(-0.34965 + 1.74825 t - 0.174825 t^2 - 8.50421 10^-19 t^3 )

```

## Apêndice B

Rotina para software mathematica para determinação da função  $\gamma(t)$ .

```

area=-6.0221t^4+59.794t^3-209.12t^2+303.55t-0.0842
forca=-0.3912t^4+3.8842t^3-13.584t^2+19.719t-0.005
def=-0.1174t^4+11.653t^3-4.0753t^2+5.9156t-0.0016
gama=0.7523*def*area^0.5*forca^-1
Simplify[gama]
Plot[gama,{t,0.1,5.}]
-0.0842 + 303.55 t - 209.12 t^2 + 59.794 t^3 - 6.0221 t^4
-0.005 + 19.719 t - 13.584 t^2 + 3.8842 t^3 - 0.3912 t^4
-0.0016 + 5.9156 t - 4.0753 t^2 + 11.653 t^3 - 0.1174 t^4
(0.7523 (-0.0842 + 303.55 t - 209.12 t^2 + 59.794 t^3 - 6.0221 t^4)^0.5
(-0.0016 + 5.9156 t - 4.0753 t^2 + 11.653 t^3 - 0.1174 t^4)) / (-0.005 + 19.719 t - 13.584 t^2 +
3.8842 t^3 - 0.3912 t^4)
(0.7523*(-0.0842 + 303.55*t - 209.12*t^2 + 59.794*t^3 - 6.0221*t^4)^0.5*
(-0.0016 + 5.9156*t - 4.0753*t^2 + 11.653*t^3 - 0.1174*t^4))/
(-0.005 + 19.719*t - 13.584*t^2 + 3.8842*t^3 - 0.3912*t^4)
-Graphics-

```